ε-ungefähre Analysis

Stephan Kulla

München 2012

ε-ungefähre Analysis

Stephan Kulla

Bachelorarbeit
an der Mathematikfakultät
der Ludwig–Maximilians–Universität
München

vorgelegt von
Stephan Kulla
aus Potsdam

München, den 30.01.2012

Betreuer: Prof. Dr. Horst Osswald

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Zusammenfassung

In dieser Bachelorarbeit werde ich dir eine alternative Theorie der Analysis vorstellen, die ich „ε-ungefähre Analysis“ nennen möchte. Hierzu werde ich zunächst die Abstandsrelation $\approx_{\leq\varepsilon}$ einführen, die definiert, wann zwei Zahlen ungefähr gleich sind oder (anders ausgedrückt) wann der Abstand zweier Zahlen infinitesimal ist. Dazu definiere ich $x \approx_{\leq\varepsilon} y :\Leftrightarrow |x-y| \leq \varepsilon$, wobei ε eine nicht negative reelle Zahl ist[1].

Mit Hilfe dieser neuen Relation $\approx_{\leq\varepsilon}$ werde ich eine neue Theorie der Analysis formulieren. Hierzu werde ich untersuchen, wie die in der Analysis wesentlichen Konzepte der Konvergenz, Stetigkeit, Differentiation und Integration mit Hilfe der Relation $\approx_{\leq\varepsilon}$ definiert werden können. Wesentliche Eigenschaften dieser neuen Definitionen werde ich in dieser Bachelorarbeit beweisen. Dabei ist es mein Ziel, eine alternative Variante des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung[2] für meine Theorie zu finden.

Außerdem werde ich Zusammenhänge zwischen der ε-ungefähren Analysis und der heutzutage in den Erstsemestlervorlesungen der Universitäten gelehrten Analysis untersuchen und darlegen. Es wird sich zeigen, dass es durchaus starke Verbindungen zwischen diesen beiden Theorien der Analysis gibt und beide Theorien gut miteinander harmonieren.

[1]Du erkennst, dass sich meine Definition des Infinitesimalen stark von der historischen Auffassung des Infinitesimalen als unendlich kleine positive Zahl unterscheidet.

[2]siehe Wikipedia-Artikel „Fundamentalsatz der Analysis“

Anmerkungen zur Bachelorarbeit

Es folgen einige Anmerkungen zu dieser Bachelorarbeit.

Der definierende Existenzquantor

In dieser Bachelorarbeit will ich versuchen Beweise stärker durch aussagenlogische Formalismen zu strukturieren. So werden viele Beweise folgende Form aufweisen:

$$
\begin{aligned}
& \text{Prämisse} && (1)\\
\Rightarrow\ & \text{gefolgerte Aussage} && (2)\\
& \quad\big\downarrow \text{ Kommentar zur Folgerung} &&\\
\Rightarrow\ & \text{gefolgerte Aussage} && (3)\\
& \vdots &&\\
\Rightarrow\ & \text{zu beweisende Konklusion} && (4)
\end{aligned}
$$

Manchmal werde ich innerhalb solcher Beweise Existenzen von Objekten zeigen, die ich in den darauf folgenden Aussagen wieder verwenden werde. Um solche Objekte gesondert zu kennzeichnen, werde ich den *definierenden Existenzquantor* $\underset{\text{def}}{\exists}$ nutzen.

Eine Zeile mit der Aussage $\underset{\text{def}}{\exists} \tilde{x} \in M : A(\tilde{x})$ bedeutet also, dass ein Element $\tilde{x}$ aus der Menge M mit der Eigenschaft $A(\tilde{x})$ existiert und dass in den folgenden Beweisschritten $\tilde{x}$ stets dieses Objekt bezeichnet. $\underset{\text{def}}{\exists}$ ist somit der normale Existenzquantor, der den Leser nur zusätzlich darauf hinweist, dass das existierende Objekt in den folgenden Aussagen wieder verwendet wird. Die Wirkung des definierenden Existenzquantors ist also ähnlich der Definition von Variablen in Programmiersprachen.

Zum Begriff „klassisch“

In dieser Bachelorarbeit werde ich eine neue Theorie der Analysis formulieren. Um nun auf die jetzige an den Universitäten gelehrte Analysis zu verweisen, werde ich den Begriff

„klassisch“ verwenden. So bezeichne ich mit dem Begriff „klassische Cauchyfolge“ beispielsweise die „normale“ Cauchyfolge, so wie du sie aus deinem Studium kennst[3]. Damit solltest du leicht zwischen den Definitionen aus der ε-ungefähren Analysis und den Standarddefinitionen unterscheiden können.

Besonderheiten dieser Bachelorarbeit

Ich will diese Bachelorarbeit so schreiben, dass du ihr möglichst leicht folgen und sie schnell verstehen kannst. Deswegen werde ich die Theorie der ε-ungefähren Analysis sehr ausführlich darstellen. Ich bin der Meinung, dass bereits Studenten ab dem zweiten Fachsemester diese Bachelorarbeit lesen können, sobald sie die grundlegenden Begriffe der Topologie kennen gelernt haben.

Anders als in anderen wissenschaftlichen Texten werde ich dich in dieser Bachelorarbeit direkt mit „du“ ansprechen. Ich erhoffe mir, dass dadurch der Text lebendiger wirkt und es dir leichter fallen wird, dem Inhalt aufmerksam zu folgen.

Des weiteren werde ich dir bei größeren Sätzen neben dem Beweis auch den Lösungsweg darstellen, also den Weg, wie ich den Beweis gefunden habe. Für mich sind solche Lösungswege wichtige Bausteine einer mathematischen Theorie. Dadurch werden nicht nur Beweise nachvollziehbarer, Lösungswege bieten auch die Möglichkeit, die Gedanken des Autors besser kennen zu lernen. Anderen Mathematikern sollte es so einfacher fallen, die dargestellte mathematische Theorie zu erweitern und zu verbessern.

Auch alle Beweise habe ich ausgeführt, da ich nicht weiß, wer welche Beweise als trivial betrachtet. Es wird sicherlich vorkommen, dass du einige Sätze als selbstverständlich ansehen wirst. Die Beweise zu diesen Sätzen kannst du dann einfach überspringen.

Lizenz

[3] Du findest eine solche Standarddefinition der Cauchyfolge beispielsweise im Lehrbuch „Analysis 1“ von Prof. Forster [13, Seite 41].

Auch wenn es nicht notwendig ist, so freue ich mich doch, wenn du mich bei Benutzung dieser Bachelorarbeit informierst.

Kontakt

Wenn du mir eine Nachricht schreiben willst, so findest du meine Kontaktdaten auf meiner Homepage `http://homepages.physik.uni-muenchen.de/~Stephan.Kulla/`.

Kapitel 1

Einführung

Wie ich bereits in der Zusammenfassung geschrieben habe, möchte ich dir in dieser Bachelorarbeit eine alternative Theorie der Analysis vorstellen. Wieso solltest du dich aber mit einer neuen Theorie der Analysis beschäftigen, wenn doch die klassische Analysis bereits stark in der Mathematik etabliert und sehr mächtig in ihrer Anwendung ist?

Ich will diese Frage nicht direkt beantworten, sondern dir erst einmal meinen Weg zur ε-ungefähren Analysis beschreiben und meine Motivation für diese Theorie darlegen.

1.1 Mein Weg zur ε-ungefähren Analysis

Vielfach wurde ich vor und während meines Studiums damit konfrontiert, dass Ungewissheiten wesentlicher Bestandteil bei der Beschreibung der uns umgebenden Welt ist. So können Messwerte in Experimenten nie exakt sondern nur bis auf einen Messfehler genau angegeben werden. Dasselbe gilt auch für andere Daten wie die aktuelle Einwohnerzahl Deutschlands, dem Umsatz eines Unternehmens oder dem Umfang der Erde. Außerdem gelten viele Theorien nur in idealisierten Bedingungen. Sind diese Bedingungen nicht erfüllt, treten Abweichungen zwischen den gemessenen und den theoretisch berechneten Werten auf. So gilt die klassische Newtonsche Mechanik nur bei gegenüber der Lichtgeschwindigkeit kleinen Geschwindigkeiten[8][12, Seite 11] und die thermodynamische Beschreibung eines idealen Gases geht davon aus, dass die Gasteilchen keine äußeren Kräfte ausgesetzt sind[7][15, Seite 542].

Ich entwickelte dann die Idee, man könnte die eben beschriebene Ungewissheit direkt in die Theorie der Analysis einbauen. Ich hatte vor, Analysis mit zugrunde liegender Fuzzylogik[1] zu betreiben, so dass die Ungewissheit bereits auf der Ebene der Logik eingebaut werden könnte. Jedoch verfolgte ich diese Idee nicht weiter.

Außerdem wurde ich regelmäßig in meinem Physikstudium mit Infinitesimalen konfrontiert. Sowohl in der Vorlesung als auch in der Literatur begegneten mir viele Beweise, die mit infinitesimalen Größen geführt wurden[2]. Auch wurde oft die Ableitung $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ als tatsäch-

[1] siehe Wikipedia-Artikel „Fuzzylogik“

[2] siehe zum Beispiel [10, Seite 59]

licher Quotient und nicht als historische Schreibweise angesehen. Epsilons und Deltas, die ich in den Mathevorlesungen zwangsweise lieben gelernt habe, bekam ich dagegen kaum zu Gesicht. Dies brachte mich natürlich zum Nachdenken. Auf der einen Seite wurde mir eine infinitesimalfreie Analysis beigebracht und auf der anderen Seite argumentierten viele Physiker weiterhin mit der aus der Mathematik verbannten Idee des Infinitesimalen. Welchen Sinn macht die Lehre der Epsilon-Delta-Analysis, wenn sie in der Physik ignoriert wird?

Als ich mit einem Freund über meine Ideen und die von mir wahrgenommene Diskrepanz zwischen mathematischer Lehre und physikalischen Argumentationen sprach, empfahl er mir die Lektüre der Nichtstandardanalysis[3]. In der Nichtstandardanalysis solle es infinitesimale Größen geben und trotzdem die Theorie widerspruchsfrei sein. Sie sei also eine Theorie, die das Infinitesimale wiederbelebt. Ich befolgte seinen Rat und las mich in die Nichtstandardanalysis ein.

Die Theorie der Nichtstandardanalysis hatte mich schnell überzeugt und ich sah in ihr einen guten Kandidaten der zukünftigen Analysis. Ich wollte ursprünglich meine Bachelorarbeit zu diesem Thema schreiben, um mich weiter einarbeiten zu können. Langfristig war es mein Ziel, ein deutschsprachiges Lehrbuch zur Nichtstandardanalysis für Studienanfänger zu schreiben, um so zur Verbreitung dieser Theorie beizutragen.

Beim Suchen nach einem passenden Thema zur Bachelorarbeit erinnerte ich mich jedoch an meine alte Idee einer Analysis auf Grundlage der Fuzzylogik. Ich las mich auch in dieses Thema ein[4] und begann nun über eine neue Analysis mit Fuzzylogik nachzudenken. Die Nichtstandardanalysis war dabei mein Vorbild.

Ich gab diese Idee jedoch schnell wieder auf. Mir schien, dass eine Analysis mit Fuzzylogik zu kompliziert wird. Außerdem steckt in dieser Logik selbst viel klassische Analysis, was Probleme verursacht hätte. Auf der Suche nach einer alternativen Theorie macht es wenig Sinn, wenn in der zugrunde liegenden Logik klassische Analysis mit einfließt.

Ich entschied mich aber dafür, die Idee der Fuzzylogik zu übernehmen, eine nur vage definierte Gleichheitsbeziehung einzuführen. Ich wollte also eine neue Relation definieren, die ausdrücken sollte, wann zwei Zahlen ungefähr gleich oder (anders ausgedrückt) wann sie infinitesimal verschieden sind. Ich taufte diese Relation „Infinitesimalrelationen“ und fand schnell Beispiele dafür: die Infinitesimalrelation in der Nichtstandardanalysis, die Abstandsrelation (die ich später in dieser Bachelorarbeit vorstellen werde) und die durch die endliche binäre Darstellung von Zahlen in Computersystemen induzierte Relation „x ist ungefähr y, wenn die binäre Darstellung beider Zahlen übereinstimmt“.

Ich suchte die wesentlichen Eigenschaften dieser Relationen, um sie als Axiome der Infinitesimalrelation zu postulieren. Ich wollte nämlich genau so Infinitesimalrelationen über Axiome charakterisieren, wie in der Mathematik Vektorräume über die Vektorraumaxiome beschrieben werden.

Die Suche nach diesen Axiomen erwies sich aber als schwierig und so fing ich an, eine

[3] siehe Wikipedia-Artikel „Nichtstandardanalysis“

[4] Ich las vor allem das Skript zur Vorlesung „Fuzzy-Systeme“ von Prof. Dr. Rudolf Kruse. Du findest dieses Skript unter der URL `http://fuzzy.cs.uni-magdeburg.de/studium/fuzzy/txt/fsbook.pdf`.

konkrete Analysis mit Hilfe einer speziellen Infinitesimalrelation, der Abstandsrelation zu formulieren. Dabei diente mir die Theorie der Nichtstandardanalysis als Vorbild. Meine Idee war es, am Ende diejenigen Eigenschaften der Abstandsrelation als Axiome der Infinitesimalrelation zu definieren, die ich für die Beweise benötigt hatte. So würde ich nämlich wissen, dass mit diesen Axiomen sinnvoll Analysis betrieben werden kann.

Ich merkte jedoch, dass bereits diese spezielle Theorie sehr umfangreich wurde. Gleichzeitig drängte die Zeit, meine Bachelorarbeit abzuschließen und so entschied ich mich dafür, erst einmal nur über die spezielle Theorie der Abstandsrelation zu schreiben. Das Ergebnis kannst du nun auf diesen Seiten lesen.

Du siehst also, dass diese Theorie der Abstandrelation für mich nur ein Zwischenschritt zu einer allgemeineren Analysis mit Infinitesimalrelation ist. Ich will den Weg zu dieser abstrakteren Analysis nach meiner Bachelorarbeit weiter bestreiten. Wenn du auch Lust dazu hast, dann nimm doch Kontakt mit mir auf[5].

1.2 Die Geschichte des Infinitesimalen

Auch wenn es für das Verständnis dieser Bachelorarbeit nicht notwendig ist, so empfehle ich dir doch, dich mit der Geschichte des Infinitesimalen auseinanderzusetzen. Eine sehr gute Zusammenfassung hat Israel Kleiner in seinem Artikel „History of the Infinitely Small and the Infinitely Large in Calculus“ geschrieben, die ich dir sehr ans Herz lege. Du kannst auf diesen Artikel kostenlos über den Link `http://www.springerlink.com/content/r99j3glb1ctrtfjt/` zugreifen. Eine kürzere Zusammenfassung findest du im Wikipedia-Artikel „Infinitesimalrechnung“.

[5] Meine Kontaktdaten findest du auf meiner Homepage `http://homepages.physik.uni-muenchen.de/~Stephan.Kulla/`.

Kapitel 2

Die Abstandsrelation

2.1 Ein Gedankenexperiment

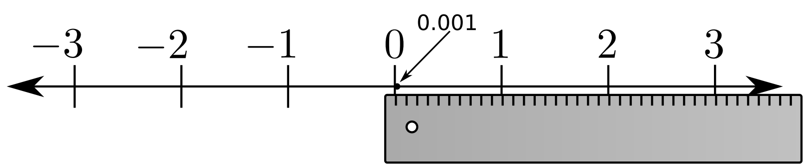

Abbildung 2.1: Gedankenexperiment zur Abstandsrelation (Abwandlung vom Bild „Real number line for Algebra book.svg“ von User:Thenub314 lizenziert unter CC-BY-SA; Diese Abbildung steht unter der Lizenz CC-BY-SA)

Stell dir die Menge der reellen Zahlen als Zahlengerade vor, auf der der Abstand der Zahlen 0 und 1 genau 1 cm beträgt. Um Abstände auf dieser Zahlengeraden zu messen, hast du ein handelsübliches Linear mit der kleinsten Skaleneinheit von 1 mm. Wenn du nun den Abstand der Zahlen 0 und $\frac{1}{1000} = 0.001$ angeben musst, so ist dieser für dich 0. Der kleinste Abstand größer Null, den du nämlich mit dem Lineal messen kannst, ist 0.05, weil der kleinsten Skaleneinheit 1 mm der Zahl 0.1 entspricht und ab 0.05 aufgerundet wird. Damit sind die Zahlen 0 und $\frac{1}{1000}$ „gleich“ oder (besser ausgedrückt) „ungefähr gleich“.

Um dieses Phänomen beschreiben zu können, führe ich eine neue Relation $\approx$ ein. Ich definiere $0 \approx \frac{1}{1000}$, was „0 ist ungefähr $\frac{1}{1000}$“ bedeuten soll. In diesem Gedankenexperiment ist somit für alle reellen Zahlen x und y:

$$x \approx y \Leftrightarrow |x - y| < 0.05 \tag{2.1}$$

Im Folgenden gehe ich jedoch von einer anderen Rundungsregel aus: Bis einschließlich 0.05 wird abgerundet. Durch diese neue Regel erhalte ich folgende Relation für „x ist ungefähr y“:

$$x \approx y \Leftrightarrow |x-y| \leq 0.05 \tag{2.2}$$

Diese Relation $\approx$ werde ich im nächsten Abschnitt zur Abstandsrelation verallgemeinern.

Bemerkung. In diesem Gedankenexperiment ist bereits ein Nachteil der Abstandsrelation erkennbar: Wenn x sehr nah an der Zahl 0.05 liegt, ist es schwer mit dem Auge zu entscheiden, ob x kleiner gleich oder größer als 0.05 ist. Diese Unsicherheit sollte eigentlich auch von der Abstandsrelation modelliert werden, was nicht der Fall ist.

2.2 Definition der Abstandsrelation

Die Relation des obigen Gedankenexperiments kann ich zunächst dadurch verallgemeinern, indem ich für das Lineal als kleinste Skaleneinheit einen beliebigen Abstand 2ε mit $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ wähle. Es ist dann

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : (x \approx_{\leq \varepsilon} y \Leftrightarrow |x-y| \leq \varepsilon) \tag{2.3}$$

Dabei signalisiere ich mit dem Symbol $\approx_{\leq \varepsilon}$, dass 2ε die kleinste Skaleneinheit ist. Die „2“ in 2ε kommt daher, dass mit meiner obigen Rundungsregel bei einer Skaleneinheit von 2ε bis einschließlich ε abgerundet wird. Da außerdem obige Definition von $\approx_{\leq \varepsilon}$ auch für $\varepsilon = 0$ sinnvoll ist, lasse ich auch diesen Fall zu.

Die Definition von $\approx_{\leq \varepsilon}$ verallgemeinere ich noch weiter, indem ich der Relation anstatt $\mathbb{R}$ einen beliebigen metrischen Raum (X, d) zugrunde lege. So erhalte ich die allgemeine Definition der Abstandsrelation:

Definition 2.1 (Abstandsrelation auf metrischen Räumen)**.** Sei (X, d) ein metrischer Raum und $\varepsilon \in \mathbb{R}_0^+$. Die *Abstandsrelation* $\approx_{\leq \varepsilon}$ ist für alle $x, y \in X$ definiert durch:

$$x \approx_{\leq \varepsilon} y :\Leftrightarrow d(x, y) \leq \varepsilon \tag{2.4}$$

Beispiel 2.1. In $\mathbb{R}$ mit der Standardmetrik ist

- $0 \approx_{\leq 10} 5$
- $0 \approx_{\leq 5} 5$
- $0 \not\approx_{\leq 4} 5$

Bemerkung. Anstatt $\varepsilon \in \mathbb{R}_0^+$ könnte auch $\varepsilon \in \mathbb{Q}_0^+$ gewählt werden. Außerdem entspricht für $\varepsilon = 0$ die Abstandsrelation $\approx_{\leq 0}$ der Gleichheitsrelation $=$.

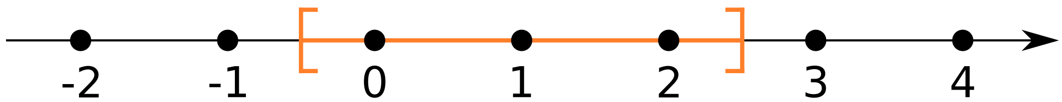

Abbildung 2.2: Zahlenstrahl mit eingezeichneter Menge $\{x \in \mathbb{R} : x \approx_{\leq 1{,}5} 1\}$

2.2.1 $<$ oder $\leq$?

Es ist berechtigt zu fragen, ob die Kleiner- oder die Kleiner-Gleich-Relation in der Definition der Abstandsrelation verwendet werden soll. Sollte ich also „$x \approx y :\Leftrightarrow d(x,y) < \varepsilon$“ oder „$x \approx y :\Leftrightarrow d(x,y) \leq \varepsilon$“ definieren?

Je nach konkrete Anwendung fällt die Antwort anders aus. Beim obigen Gedankenexperiment ist die Antwort beispielsweise davon abhängig, wie gerundet wird.

In dieser Bachelorarbeit werde ich die Kleiner-Gleich-Relation verwenden, weil dann einige Beispiele leichter aufgestellt und einige Beweise leichter geführt werden können. Es gibt auch Sätze, die nur für die Kleiner-Gleich-Abstandsrelation beweisbar sind (zum Beispiel Satz 3.12).

Zur Vollständigkeit definiere ich aber noch die *Kleiner-Abstandsrelation*:

Definition 2.2 (Kleiner-Abstandsrelation auf metrischen Räumen)**.** Sei (X,d) ein metrischer Raum und $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Für alle $x, y \in X$ ist die *Kleiner-Abstandsrelation* $\approx_{<\varepsilon}$ definiert durch:

$$x \approx_{<\varepsilon} y :\Leftrightarrow d(x,y) < \varepsilon \tag{2.5}$$

In dieser Bachelorarbeit werde ich nur die Kleiner-Gleich-Abstandsrelation $\approx_{\leq\varepsilon}$ untersuchen. Ich werde darauf hinweisen, wenn eine Unterscheidung der beiden Abstandsrelationen notwendig ist oder ich nur die Kleiner-Abstandsrelation $\approx_{<\varepsilon}$ betrachte. Ansonsten sollten alle Definition und Sätze analog formuliert und alle Beweise analog geführt werden können.

2.2.2 Vor- und Nachteile der Definition

Ich möchte natürlich nicht verschweigen, dass obige Definition der Abstandsrelation aus meiner Sicht neben vielen Vorteilen auch einige Nachteile besitzt.

Zunächst zu den Vorteilen: Die Definition ist einfach und pragmatisch, was sich auch auf die Theorie auswirken sollte. Des weiteren lässt sich diese Relation gut motivieren (siehe Gedankenexperiment 2.1) und es sollten sich viele Anwendungsfälle für diese Relation finden lassen. So bietet der Begriff des absoluten Fehlers eine gute Anwendung für die Abstandsrelation: Der absolute Fehler eines Messwerts x zu einer physikalischen Größe y ist genau dann $\varepsilon \in \mathbb{R}_0^+$, wenn $x \approx_{\leq\varepsilon} y$ ist [1].

Soweit ich weiß, wird außerdem diese Relation in keiner Analysis als Infinitesimalrelation verwendet (in keiner mir bekannten analytischen Theorie wird definiert, dass zwei Zahlen infinitesimal voneinander entfernt sind, wenn ihr Abstand kleiner gleich einem vorgegebenen $\varepsilon \in \mathbb{R}_0^+$ ist). Damit betreten wir in dieser Arbeit mathematisches Neuland, was ich auch als Vorteil dieser Relation ansehe (eben weil es spannend ist ☺).

Zu den Nachteilen: Auch wenn es viele Anwendungsfälle gibt, so ist doch die Definition der Abstandsrelation noch relativ speziell. Es ist beispielsweise vorstellbar, dass die Abstände der Skalen unseres Lineals nicht konstant sind. So könnte sich der maximale Abstand zwischen einem festen Objekt x und den von x infinitesimal verschiedenen Werten y mit dem Objekt x ändern. Wir könnten fordern, dass zwar $1001 \approx 1000$, aber $1 \not\approx 2$ ist, obwohl jeweils beide Zahlenpaare denselben Abstand voneinander besitzen. In der Abstandsrelation wären beide Zahlenpaare entweder ungefähr gleich zueinander oder nicht.

Außerdem ist im Allgemeinen die Grenze zwischen $x \approx_{\leq \varepsilon} y$ und $x \not\approx_{\leq \varepsilon} y$ „hart“. So ist beispielsweise $0 \approx_{\leq 1} 1$ aber $0 \not\approx_{\leq 1} 1.0001$. Diese „harte“ Grenze lässt sich aber im Modell selten begründen. Wieso sollte durch eine minimale Änderung der von 0 bezüglich $\approx_{\leq 1}$ infinitesimal verschiedenen Zahl 1 eine von 0 nicht mehr infinitesimal verschiedene Zahl 1.0001 entstehen?

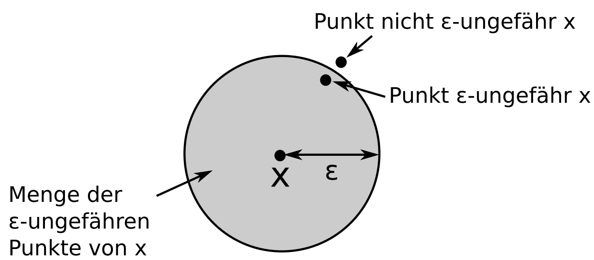

Abbildung 2.3: Punkt x mit eingezeichneter Menge der ε-ungefähr gleichen Punkte

Das Problem der „harten Grenze“ kann man auch mit der charakteristischen Funktion $\chi_x : X \to \mathbb{R} : y \mapsto \begin{cases} 1 & ; x \approx_{\leq \varepsilon} y \\ 0 & ; x \not\approx_{\leq \varepsilon} y \end{cases}$ beschreiben. Diese ist nämlich unstetig und verändert sich sprunghaft. Dieser Nachteil könnte zum Beispiel über die Fuzzylogik behoben werden, indem die Relation $\approx_{\leq \varepsilon}$ durch eine Fuzzy-Menge beschrieben wird. Diese Möglichkeit werde ich aber in dieser Bachelorarbeit nicht weiter beschreiben.

2.3 Eigenschaften der Abstandsrelation

Aus der Definition von $\approx_{\leq \varepsilon}$ folgt direkt, dass diese Relation reflexiv und symmetrisch ist. Doch wie sieht es mit der Transitivität aus?

Im Allgemeinen ist sie nicht erfüllt. So ist $0 \approx_{\leq 1} 0.75$ und $0.75 \approx_{\leq 1} 1.5$, aber $0 \not\approx_{\leq 1} 1.5$. Jedoch kann mit Hilfe der Dreiecksungleichung für Metriken eine schwache Variante der Transitivität bewiesen werden:

Satz 2.1 (Schwache Transitivitätseigenschaft der Abstandsrelation)**.** *Sei* (X, d) *ein metrischer Raum. Für alle* $x, y, z \in X$ *gilt:*

$$(x \approx_{\leq \varepsilon} y) \wedge (y \approx_{\leq \delta} z) \Rightarrow (x \approx_{\leq \varepsilon+\delta} z) \tag{2.6}$$

Beweis. Sei (X, d) ein beliebiger metrischer Raum und $x, y, z \in X$. Es ist

$$(x \approx_{\leq \varepsilon} y) \wedge (x \approx_{\leq \delta} z) \tag{2.7}$$

$$\Leftrightarrow (d(x,y) \leq \varepsilon) \wedge (d(x,z) \leq \delta) \tag{2.8}$$

$$\Rightarrow d(x,z) \overset{\text{Dreiecksungleichung}}{\leq} d(x,y) + d(y,z) \leq \varepsilon + \delta \tag{2.9}$$

$$\Rightarrow x \approx_{\leq \varepsilon+\delta} y \tag{2.10}$$

□

Bemerkung. Die schwache Transitivitätseigenschaft der Abstandsrelation werde ich vor allem in der Form $\delta = \varepsilon$ verwenden:

$$(x \approx_{\leq \varepsilon} y) \wedge (y \approx_{\leq \varepsilon} z) \Rightarrow (x \approx_{\leq 2\varepsilon} z) \tag{2.11}$$

Bemerkung. Wenn in einer Gleichungskette mehrere Abstandsrelationen verwendet werden, so musst du am Ende die Abstandsrelationen nach der schwachen Transitivitätseigenschaft richtig zusammenfassen. So folgt aus der Gleichungskette $a \approx_{\leq \varepsilon} b = c \approx_{\leq \delta} d \approx_{\leq \gamma} e$ nur, dass $a \approx_{\leq \varepsilon+\delta+\gamma} e$ ist.

Bemerkung. Dass obiger Satz nicht schärfer formuliert werden kann, siehst du am Beispiel der Zahlen -1, 0 und 1. Es ist $-1 \approx_{\leq 1} 0$ und $0 \approx_{\leq 1} 1$, aber für alle ε mit $0 \leq \varepsilon < 2$ ist $-1 \not\approx_{\leq \varepsilon} 1$.

Aus der Definition der Abstandsrelation folgt direkt eine weitere wichtige Eigenschaft:

Satz 2.2 (Monotoniesatz der Abstandsrelation)**.** *Sei* (X, d) *ein beliebiger metrischer Raum. Für alle* $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}_0^+$ *und allen* $x, y \in X$ *gilt*

$$(x \approx_{\leq \varepsilon} y) \wedge (\delta \geq \varepsilon) \Rightarrow (x \approx_{\leq \delta} y) \tag{2.12}$$

Beweis.

$$x \approx_{\leq \varepsilon} y \tag{2.13}$$

$$\Rightarrow d(x,y) \leq \varepsilon \tag{2.14}$$

$$
\begin{aligned}
&\Big\downarrow\ \varepsilon \leq \delta \\
&\Rightarrow d(x, y) \leq \delta && (2.15)\\
&\Rightarrow x \approx_{\leq \delta} y && (2.16)
\end{aligned}
$$

□

Für normierte Räume gelten zusätzlich folgende Additionsregeln, auf welche ich in dieser Bachelorarbeit zurückgreifen werde:

Satz 2.3 (Additionsregeln der Abstandsrelation)**.** *Für alle $u, v, x, y, z \in X$ aus dem normierten Grundraum $(X, \|\cdot\|)$ und für alle $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}_0^+$ ist:*

(a) $x \approx_{\leq \varepsilon} y \Rightarrow x + z \approx_{\leq \varepsilon} y + z$

(b) $x \approx_{\leq \varepsilon} y \wedge v \approx_{\leq \delta} u \Rightarrow x + v \approx_{\leq \varepsilon + \delta} y + u$

(c) $x \approx_{\leq \varepsilon} y + z \Rightarrow x \approx_{\leq \varepsilon + \|z\|} y$

Beweis. (a) Es ist

$$
\begin{aligned}
& d(x+z, y+z) = \|(x+z) - (y+z)\| = \|x - y\| = d(x, y) \overset{x \approx_{\leq \varepsilon} y}{\leq} \varepsilon && (2.17)\\
\Rightarrow\ & x + z \approx_{\leq \varepsilon} y + z && (2.18)
\end{aligned}
$$

(b) Es ist

$$
\begin{aligned}
& x + v \overset{\text{(a)}}{\approx}_{\leq \varepsilon} y + v \overset{\text{(a)}}{\approx}_{\leq \delta} y + u && (2.19)\\
& \Big\downarrow\ \text{schwache Transitivitätseigenschaft (Satz 2.1)} \\
\Rightarrow\ & x + v \approx_{\leq \varepsilon + \delta} y + u && (2.20)
\end{aligned}
$$

(c) Sei $x \approx_{\leq \varepsilon} y + z$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
\|x - y\| &= \|x - y - z + z\| && (2.21)\\
&\leq \|x - (y + z)\| + \|z\| \\
&\leq \varepsilon + \|z\|
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow x \approx_{\leq \varepsilon + \|z\|} y \qquad (2.22)
$$

□

Kapitel 3

Folgen und Grenzwerte

3.1 ε-ungefähre Konvergenz

3.1.1 Neuer Quantor „Für fast alle $n \in \mathbb{N}$“

In diesem Abschnitt werde ich viel über Eigenschaften von Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sprechen, die für fast alle Folgenglieder x_n erfüllt sind. Um eine kurze Notation für solche Eigenschaften zu haben, führe ich den neuen Quantor $\ddot{\forall} n \in \mathbb{N}$ („für fast alle $n \in \mathbb{N}$“) ein:

Definition 3.1 (Fast-Alle-Quantor)**.** Eine Aussage $\ddot{\forall} n \in \mathbb{N} : A(n)$ ist genau dann wahr, wenn es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq N$ die Aussageform $A(n)$ erfüllt ist. Es ist also genau dann $\ddot{\forall} n \in \mathbb{N} : A(n)$ eine wahre Aussage, wenn $A(n)$ bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. $\ddot{\forall} n \in \mathbb{N} : A(n)$ bedeutet somit „Für fast alle $n \in \mathbb{N}$ ist $A(n)$ erfüllt“. Es ist:

$$\ddot{\forall} n \in \mathbb{N} : A(n) :\Leftrightarrow \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq N \Rightarrow A(n)) \tag{3.1}$$

Satz 3.1 (Konjunktionseigenschaft des Fast-Alle-Quantors)**.** *Seien $A(n)$ und $B(n)$ Aussageformen in der freien Variablen n. Es ist*

$$\left(\ddot{\forall} n \in \mathbb{N} : A(n)\right) \land \left(\ddot{\forall} n \in \mathbb{N} : B(n)\right) \Rightarrow \ddot{\forall} n \in \mathbb{N} : (A(n) \land B(n)) \tag{3.2}$$

Beweis.

$$\left(\ddot{\forall} n \in \mathbb{N} : A(n)\right) \land \left(\ddot{\forall} n \in \mathbb{N} : B(n)\right) \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \left(\underset{\text{def}}{\exists} N_A \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq N_A \Rightarrow A(n))\right) \\ & \land \left(\underset{\text{def}}{\exists} N_B \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq N_B \Rightarrow B(n))\right) \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq \max\{N_A, N_B\} \Rightarrow A(n) \land B(n)) \tag{3.5}$$

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq N \Rightarrow A(n) \wedge B(n)) \tag{3.6}$$

$$\Rightarrow \ddot{\forall} n \in \mathbb{N} : A(n) \wedge B(n) \tag{3.7}$$

□

Bemerkung. Aus der Konjunktionseigenschaft des Fast-Alle-Quantors folgt

$$\begin{aligned}&\left(\ddot{\forall} n \in \mathbb{N} : A_1(n)\right) \wedge \left(\ddot{\forall} n \in \mathbb{N} : A_2(n)\right) \wedge \dots \wedge \left(\ddot{\forall} n \in \mathbb{N} : A_m(n)\right)\\ \Rightarrow\ & \ddot{\forall} n \in \mathbb{N} : (A_1(n) \wedge A_2(n) \wedge \dots \wedge A_m(n))\end{aligned} \tag{3.8}$$

3.1.2 Definition der ε-ungefähren Konvergenz

Genau wie die meisten Analysislehrbücher beginne ich mit der Definition des Grenzwerts einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definition 3.2 (ε-ungefährer Grenzwert)**.** Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus einem metrischen Raum (X, d). Ein Objekt $x_g \in X$ heißt *ε-ungefährer Grenzwert* von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn $\ddot{\forall} n \in \mathbb{N} : x_n \approx_{\leq\varepsilon} x_g$, wenn es also ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $x_n \approx_{\leq\varepsilon} x_g$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq N$ ist. Ich schreibe dann $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \approx_{\leq\varepsilon} x_g$. Es ist also:

$$\lim_{n\to\infty} x_n \approx_{\leq\varepsilon} x_g :\Leftrightarrow \left(\ddot{\forall} n \in \mathbb{N} : x_n \approx_{\leq\varepsilon} x_g\right) \tag{3.9}$$

Definition 3.3 (ε-ungefähre Konvergenz)**.** Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eines metrischen Raums ist genau dann *ε-ungefähr konvergent*, wenn sie mindestens einen ε-ungefähren Grenzwert besitzt.

Die Definition des Grenzwerts ist analog zu dem, wie manche Schüler den Grenzwert einer Folge bestimmen: Man berechne Folgenglieder mit großem Index mit den Taschenrechner. Wenn sich das Ergebnis nicht ändert, so ist es der Grenzwert der Folge. Jedoch kann der Taschenrechner nicht den exakten Wert sondern nur eine dem tatsächlichen Wert approximierte Zahl angeben. Nach dieser „Taschenrechnermethode“ ist also eine Folge genau dann gegen eine Zahl konvergent, wenn diese Zahl ab einem bestimmten Index stets ungefähr gleich den Folgengliedern ist. (Beachte jedoch, dass die Infinitesimalrelation, die dieser „Taschenrechnermethode“ zugrunde liegt, eine andere als die Abstandsrelation ist.)

Des weiteren steckt die obige Definition bereits in der klassischen Grenzwertdefinition:

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert gegen } x_g \tag{3.10}$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+\ \underbrace{\ddot{\forall} n \in \mathbb{N} : d(x_n, x_g) \leq \varepsilon}_{\lim\limits_{n\to\infty} x_n \approx_{\leq\varepsilon} x_g} \tag{3.11}$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : x_g \text{ ist } \varepsilon\text{-ungefährer Grenzwert von } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \tag{3.12}$$

Obige Äquivalenz zeigt, dass jede klassisch konvergente Folge für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ auch ε-ungefähr konvergent ist. Aus ε-ungefährer Konvergenz für ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ kann jedoch noch nicht auf klassische Konvergenz geschlossen werden. So ist $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \cdot 2 \approx_{\leq 2} 0$, obwohl $((-1)^n \cdot 2)_{n\in\mathbb{N}}$ klassisch divergiert Jedoch ist diese ε-ungefähre Konvergenz abhängig von ε, weil beispielsweise $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \cdot 2 \not\approx_{\leq 1} 0$ ist.

Wie wir später sehen werden, folgt aus ε-ungefährer Konvergenz für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ in vollständigen Räumen auch klassische Konvergenz (in obiger Äquivalenz ist nur von einer ε-ungefähren Konvergenz für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ gegen *einen für alle ε festen* Grenzwert x_g die Rede).

Anders als bei der klassischen Konvergenz ist der ε-ungefähre Grenzwert nicht eindeutig bestimmt. So ist $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \approx_{\leq 2} 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \approx_{\leq 2} \frac{1}{2}$. Jedoch ist der ε-ungefähre Grenzwert 2ε-ungefähr genau bestimmt:

Satz 3.2 (2ε-ungefähre Bestimmung des ε-ungefähren Grenzwerts)**.** *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein ε-ungefähr konvergente Folge eines metrischen Raums. Zwei ε-ungefähre Grenzwerte $\tilde{x}_1$ und $\tilde{x}_2$ dieser Folge sind 2ε-ungefähr gleich zueinander, also $\tilde{x}_1 \approx_{\leq 2\varepsilon} \tilde{x}_2$.*

Beweis.

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n \approx_{\leq\varepsilon} \tilde{x}_1\right) \wedge \left(\lim_{n\to\infty} x_n \approx_{\leq\varepsilon} \tilde{x}_2\right) \tag{3.13}$$

$$\Rightarrow \left(\ddot{\forall} n \in \mathbb{N} : x_n \approx_{\leq\varepsilon} \tilde{x}_1\right) \wedge \left(\ddot{\forall} n \in \mathbb{N} : x_n \approx_{\leq\varepsilon} \tilde{x}_2\right) \tag{3.14}$$

$$\downarrow \text{ Konjunktionseigenschaft von } \ddot{\forall} n \in \mathbb{N} \text{ (Satz 3.1)}$$

$$\Rightarrow \ddot{\forall} n \in \mathbb{N} : (x_n \approx_{\leq\varepsilon} \tilde{x}_1 \wedge x_n \approx_{\leq\varepsilon} \tilde{x}_2) \tag{3.15}$$

$$\downarrow \text{ schwache Transitivitätseigenschaft von } \approx_{\leq\varepsilon} \text{ (Satz 2.1)}$$

$$\Rightarrow \ddot{\forall} n \in \mathbb{N} : \tilde{x}_1 \approx_{\leq 2\varepsilon} \tilde{x}_2 \tag{3.16}$$

$$\Rightarrow \tilde{x}_1 \approx_{\leq 2\varepsilon} \tilde{x}_2 \tag{3.17}$$

□

Bemerkung. Obiger Satz lässt sich nicht schärfer formulieren, wie du am Beispiel der konstanten Folge $(0)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ erkennen kannst. Es sind nämlich -1 und 1 zwei 1-ungefähre Grenzwerte dieser Folge $(0)_{n\in\mathbb{N}}$, die den Abstand 2 voneinander besitzen.

3.1.3 ε-ungefähre Grenzwertmenge

Die Tatsache, dass ε-ungefähre Grenzwerte nicht mehr eindeutig bestimmt sind, motiviert die folgende Definition der ε-ungefähren Grenzwertmenge:

Definition 3.4 (ε-ungefähre Grenzwertmenge)**.** Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge eines metrischen Raums (X,d). Die ε-ungefähre Grenzwertmenge $\mathrm{G}_{\le\varepsilon}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ ist die Menge aller ε-ungefährer Grenzwerte von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\mathrm{G}_{\le\varepsilon}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) := \left\{y\in X : \lim_{n\to\infty} x_n \approx_{\le\varepsilon} y\right\} = \left\{y\in X \,\middle|\, \ddot{\forall} n\in\mathbb{N} : x_n \approx_{\le\varepsilon} y\right\} \tag{3.18}$$

Die ε-ungefähre Grenzwertmenge ist damit die Menge all derjenigen Punkte, die in fast allen abgeschlossenen Bällen $\mathrm{B}_{\le\varepsilon}(x_n) = \{y\in X : d(x_n,y)\le\varepsilon\}$ der Folgenglieder x_n enthalten sind. Die ε-ungefähre Grenzwertmenge ist somit der Limes inferior dieser abgeschlossenen Bälle:

$$\mathrm{G}_{\le\varepsilon}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{m=n}^{\infty}\mathrm{B}_{\le\varepsilon}(x_m)\right) = \liminf_{n\to\infty}\mathrm{B}_{\le\varepsilon}(x_n) \tag{3.19}$$

Beispiel 3.1. Hier sind einige Beispiele für ε-ungefähre Grenzwertmengen in $\mathbb{R}$ mit der Standardmetrik:

- $\mathrm{G}_{\le\varepsilon}\left((0)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{m=n}^{\infty}\mathrm{B}_{\le\varepsilon}(0)\right) = \mathrm{B}_{\le\varepsilon}(0) = [-\varepsilon,\varepsilon]$
- $\mathrm{G}_{\le\varepsilon}\left(\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{m=n}^{\infty}\left[\frac{1}{m}-\varepsilon,\frac{1}{m}+\varepsilon\right]\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\varepsilon,\varepsilon\right] =]-\varepsilon,\varepsilon]$
- $$\begin{aligned}\mathrm{G}_{\le\varepsilon}\left(\left((-1)^n\cdot\tfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right) &= \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{m=n}^{\infty}\left[(-1)^m\cdot\tfrac{1}{m}-\varepsilon,(-1)^m\cdot\tfrac{1}{m}+\varepsilon\right]\right)\\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\max\left\{\tfrac{(-1)^n}{n},\tfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right\}-\varepsilon,\min\left\{\tfrac{(-1)^n}{n},\tfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right\}+\varepsilon\right]\\ &=]-\varepsilon,\varepsilon[\end{aligned}$$

Die obigen Beispiele zeigen, dass ε-ungefähre Grenzwertmengen im Allgemeinen weder offen noch abgeschlossen sind.

Jedoch wissen wir nach dem Satz über die 2ε-ungefähre Bestimmung des ε-ungefähren Grenzwerts (Satz 3.2), dass die ε-ungefähre Grenzwertmenge beschränkt mit einem Durchmesser kleiner gleich 2ε ist:

$$\operatorname{diam}\mathrm{G}_{\le\varepsilon}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \sup\left\{d(x,y) : x,y\in\mathrm{G}_{\le\varepsilon}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)\right\} \overset{d(x,y)\le 2\varepsilon}{\le} 2\varepsilon \tag{3.20}$$

Dass im Allgemeinen nicht besser abgeschätzt werden kann, siehst du an der obigen Beispielmenge $\mathrm{G}_{\le\varepsilon}\left((0)_{n\in\mathbb{N}}\right) = [-\varepsilon,\varepsilon]$, die den Durchmesser 2ε besitzt.

Doch wie sieht es mit den anderen topologischen Eigenschaften aus? Untersuchen wir zunächst die Grenzwertmenge auf Zusammenhang. Ist die Grenzwertmenge immer zusammenhängend? Welche Voraussetzungen muss der zugrunde liegende Raum erfüllen, damit die Grenzwertmenge zusammenhängend ist?

Die Antwort ist erst einmal negativer Natur: Es lassen sich leicht Beispiele für nicht zusammenhängende Grenzwertmengen finden. Hierzu kannst du dir die Grenzwertmenge konstanter Folgen anschauen. Ist nämlich $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_0)_{n\in\mathbb{N}}$ konstant, so ist

$$\mathrm{G}_{\leq\varepsilon}\left((x_0)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{m=n}^{\infty}\mathrm{B}_{\leq\varepsilon}(x_0)\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\mathrm{B}_{\leq\varepsilon}(x_0) = \mathrm{B}_{\leq\varepsilon}(x_0) \tag{3.21}$$

Die Grenzwertmenge ist also gleich dem abgeschlossenen Ball um x_0 mit Radius ε. Es gibt aber Beispiele unzusammenhängender, abgeschlossener Bälle $\mathrm{B}_{\leq\varepsilon}(x_0)$, auch wenn die Grundmenge zusammenhängend ist, wie folgende zwei Abbildungen zeigen:

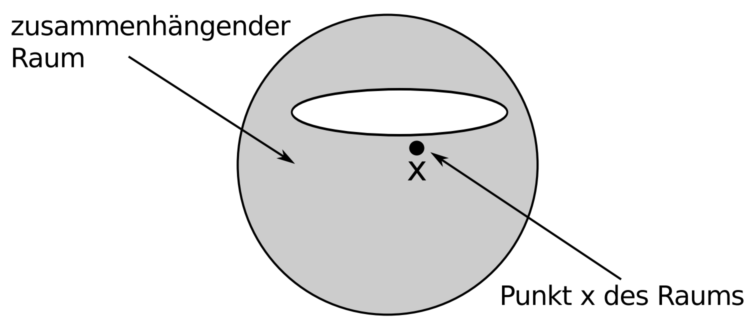

Abbildung 3.1: Ein zusammenhängender Raum

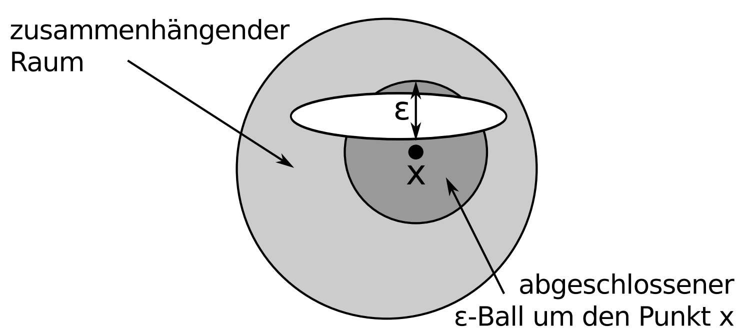

Abbildung 3.2: Obiger Raum mit nicht zusammenhängendem ε-Ball

Vielleicht hast du auch das Gefühl, dass die Grenzwertmenge im $\mathbb{R}^n$ mit der Standardmetrik der euklidischen Norm immer zusammenhängend sein sollte. Doch was sind die notwendigen und hinreichenden Eigenschaften, die wir zum Beweis eines solchen Satzes benötigen?

Wie sich nach einiger Zeit des Nachdenkens und dem Betrachten einiger Beispiele herausgestellt hat, ist es die Konvexität der Grundmenge und der Metrik:

Satz 3.3 (Konvexität der Grenzwertmenge in konvexen Räumen)**.** *Sei (X, d) ein konvexer Teilraum eines reellen oder komplexen Vektorraums mit einer konvexen Metrikfunktion d. Jede ε-ungefähre Grenzwertmenge $\mathrm{G}_{\leq\varepsilon}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ einer aus X stammenden Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvex.*

Beweis. Seien g_1 und g_2 zwei beliebige ε-ungefähre Grenzwerte der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sei außerdem λ eine beliebige reelle Zahl aus dem Intervall $[0, 1]$. Es ist:

$$\left(\ddot{\forall} n \in \mathbb{N} : x_n \approx_{\leq\varepsilon} g_1\right) \wedge \left(\ddot{\forall} n \in \mathbb{N} : x_n \approx_{\leq\varepsilon} g_2\right) \tag{3.22}$$

$$\downarrow \text{ Konjunktionseigenschaft von } \ddot{\forall} n \in \mathbb{N} \text{ (Satz 3.1)}$$

$$\Rightarrow \ddot{\forall} n \in \mathbb{N} : (x_n \approx_{\leq\varepsilon} g_1 \wedge x_n \approx_{\leq\varepsilon} g_2) \tag{3.23}$$

$$\Rightarrow \ddot{\forall} n \in \mathbb{N} : (d(x_n, g_1) \leq \varepsilon \wedge d(x_n, g_2) \leq \varepsilon) \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \ddot{\forall} n \in \mathbb{N} : \quad & d\left(x_n, \lambda \cdot g_1 + (1-\lambda) \cdot g_2\right) \\ \overset{d \text{ ist konvex}}{\leq} \quad & \lambda \cdot d\left(x_n, g_1\right) + (1-\lambda) \cdot d\left(x_n, g_2\right) \\ \leq \quad & \lambda \cdot \varepsilon + (1-\lambda) \cdot \varepsilon = \varepsilon \end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\Rightarrow \ddot{\forall} n \in \mathbb{N} : x_n \approx_{\leq\varepsilon} \lambda \cdot g_1 + (1-\lambda) \cdot g_2 \tag{3.26}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n \approx_{\leq\varepsilon} \lambda \cdot g_1 + (1-\lambda) \cdot g_2 \tag{3.27}$$

□

Insbesondere ist obiger Satz für jeden konvexen Teilraum eines normierten Vektorraums erfüllt, weil die durch eine Norm induzierte Metrik konvex ist. Zum Beweis sei hierzu x, y und z beliebige Punkte des normierten Raums und $\lambda \in [0, 1]$ beliebig. Es ist:

$$\begin{aligned} d(x, \lambda \cdot y + (1-\lambda) \cdot z) &= \|x - (\lambda \cdot y + (1-\lambda) \cdot z)\| && (3.28) \\ &= \|(\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot x) - (\lambda \cdot y + (1-\lambda) \cdot z)\| && (3.29) \\ &= \|(\lambda \cdot x - \lambda \cdot y) + ((1-\lambda) \cdot x - (1-\lambda) \cdot z)\| && (3.30) \\ &\leq \|\lambda \cdot x - \lambda \cdot y\| + \|(1-\lambda) \cdot x - (1-\lambda) \cdot z\| && (3.31) \\ &= \lambda \cdot \|x - y\| + (1-\lambda) \cdot \|x - z\| && (3.32) \\ &= \lambda \cdot d(x, y) + (1-\lambda) \cdot d(x, z) && (3.33) \end{aligned}$$

3.1.4 Zusammenhang ε-ungefähre Konvergenz und Beschränktheit einer Folge

Es kann folgender Satz der klassischen Analysis auch für ε-ungefähre Konvergenz bewiesen werden:

Satz 3.4 (Beschränktheit ε-ungefähr konvergenter Folgen)**.** *Jede ε-ungefähr konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eines metrischen Raums (X, d) ist beschränkt.*

Beweis. Sei x_g ein ε-ungefährer Grenzwert der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sei $N \in \mathbb{N}$, so dass $x_n \approx_{\leq\varepsilon} x_g$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq N$ ist. Damit ist $d(x_n, x_N) \leq d(x_n, x_g) + d(x_g, x_N) \leq 2\varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq N}$. Sei außerdem $M = \max\{d(x_k, x_N) : k \in \mathbb{N} \wedge k \leq N\}$. Dieses Maximum existiert, weil die Menge $\{d(x_k, x_N) : k \in \mathbb{N} \wedge k \leq N\}$ endlich ist. Es ist dann für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $d(x_n, x_N) \leq \max\{M, 2\varepsilon\}$ erfüllt. Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt nun:

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_N) + d(x_N, x_m) \leq 2 \cdot \max\{M, 2\varepsilon\} < \infty \tag{3.34}$$

Aus obiger Ungleichung folgt, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. □

Auch eine gewisse Umkehrung des obigen Satzes ist erfüllt:

Satz 3.5 (ε-ungefähre Konvergenz beschränkter Folgen)**.** *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge eines metrischen Raums. Dann gibt es mindestens ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_0^+$, so dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ε-ungefähr konvergent ist.*

Beweis.

$$\begin{aligned}
& (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist beschränkt} && (3.35)\\
\Rightarrow\ & \underset{\text{def}}{\exists} M \in \mathbb{R}_0^+\, \forall n, m \in \mathbb{N} : d(x_n, x_m) \leq M && (3.36)\\
\Rightarrow\ & \forall m \in \mathbb{N}\, \ddot{\forall} n \in \mathbb{N} : x_n \approx_{\leq M} x_m && (3.37)\\
\Rightarrow\ & \forall m \in \mathbb{N} : \lim_{n\to\infty} x_n \approx_{\leq M} x_m && (3.38)\\
\Rightarrow\ & (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist } \varepsilon\text{-ungefähr konvergent} && (3.39)
\end{aligned}$$

□

3.1.5 Zusammenhang zwischen ε-ungefährer und klassischer Konvergenz

Oben haben wir bereits gesehen, dass aus klassischer Konvergenz ε-ungefähre Konvergenz für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ folgt. Dass für vollständige metrische Räume auch die Umkehrung gilt, werde ich im nächsten Satz beweisen:

Satz 3.6. *Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus diesem Raum. Wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ε-ungefähr konvergent ist, konvergiert es auch klassisch.*

Lösungsweg. Um den Grenzwert der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu finden, bilde ich für eine Nullfolge $(\varepsilon_m)_{m\in\mathbb{N}}$ die Folge der Grenzwertmengen $\mathrm{G}_{\leq \varepsilon_m}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$, die nach dem Monotoniesatz 2.2 für die Abstandsrelation eine monoton fallende Folge von Mengen ist:

$$\mathrm{G}_{\leq \varepsilon_1}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \supseteq \mathrm{G}_{\leq \varepsilon_2}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \supseteq \mathrm{G}_{\leq \varepsilon_3}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \supseteq \dots \tag{3.40}$$

Im Schnitt all dieser Grenzwertmengen sollte dann der Grenzwert der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sein. Dieses Vorgehen ist ähnlich dem Intervallschachtelungsprinzip (welches die Vollständigkeit des zugrunde liegenden Raums voraussetzt). Beachte aber, dass nicht alle Mengen $\mathrm{G}_{\leq \varepsilon}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ abgeschlossen sein müssen, weswegen das Intervallschachtelungsprinzip nicht direkt angewandt werden kann.

Deswegen werde ich aus jeder Grenzwertmenge einen beliebigen Punkt auswählen. Die Folge dieser Punkte sollte dann eine Cauchyfolge sein. Weil der Grundraum vollständig ist, konvergiert diese Cauchyfolge und deren Grenzwert sollte dann auch Grenzwert der ursprünglichen Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sein.

Beweis. Für alle $m \in \mathbb{N}$ ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2^{-m}-ungefähr konvergent, so dass es für jedes $m \in \mathbb{N}$ einen 2^{-m}-ungefähren Grenzwert g_m gibt. Sei $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ die Folge dieser 2^{-m}-ungefähren Grenzwerte.

Behauptung: $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge.

Seien k und l zwei beliebige natürliche Zahlen mit $k \geq l$. Weil g_k als 2^{-k}-ungefährer Grenzwert auch ein 2^{-l}-ungefährer Grenzwert ist (Satz 2.2) und weil ε-ungefähre Grenzwerte 2ε-ungefähr bestimmt sind (Satz 3.2), ist $d(g_k, g_l) \leq 2 \cdot 2^{-l} = 2^{1-l}$. Es gilt also für alle $N \in \mathbb{N}$

$$\forall k, l \in \mathbb{N} : \left[(k \geq N) \wedge (l \geq N) \Rightarrow \left(d(g_k, g_l) \leq 2^{1-\min\{k,l\}} \leq 2^{1-N}\right)\right] \tag{3.41}$$

Wegen $\lim\limits_{N\to\infty} 2^{1-N} = 0$ ist $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Weil der zugrunde liegende Raum vollständig ist, ist die Folge $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ konvergent. Sei $g := \lim\limits_{m\to\infty} g_m$.

Behauptung: g ist Grenzwert der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \Big[$$

$$
\begin{aligned}
&\left(\lim_{m\to\infty} 2^{-m} = 0\right) \wedge \left(\lim_{m\to\infty} g_m = g\right) \\
\Rightarrow\ &\underset{\text{def}}{\exists} m \in \mathbb{N} : \left(\left(2^{-m} < \frac{\varepsilon}{2}\right) \wedge \left(d(g_m, g) < \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \\
&\quad \Big\downarrow \lim_{n\to\infty} x_n \approx_{\leq 2^{-m}} g_m \\
\Rightarrow\ &\ddot{\forall} n \in \mathbb{N} : x_n \approx_{\leq 2^{-m}} g_m \\
\Rightarrow\ &\ddot{\forall} n \in \mathbb{N} : d(x_n, g_m) \leq 2^{-m} < \frac{\varepsilon}{2} \\
\Rightarrow\ &\ddot{\forall} n \in \mathbb{N} :\ d(x_n, g) \leq d(x_n, g_m) + d(g_m, g) \\
&\qquad\qquad\qquad < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

$$]$$

$$\Rightarrow g \text{ ist Grenzwert von } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \tag{3.42}$$

$$\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist konvergent} \tag{3.43}$$

□

Damit können klassisch konvergente Folgen als genau diejenigen Folgen beschrieben werden, die für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ε-ungefähr konvergieren.

Bemerkung. Die fast überall konstanten Folgen sind genau diejenigen Folgen, die 0-ungefähr konvergieren.

3.2 ε-ungefähre Cauchyfolgen

3.2.1 Zweistelliger Fast-Alle-Quantor

Um über Cauchyfolgen zu sprechen, bietet es sich an, den Fast-Alle-Quantor (Definition 3.1) zu einen zweistelligen Quantor zu verallgemeinern. Denn eine klassische Cauchyfolge ist eine Folge, bei der für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ *fast alle* x_n und x_m einen Abstand kleiner ε besitzen, bei der also für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ für alle natürlichen Zahlen $n, m \geq N$ existiert. Zur kompakten Notation des Satzfragments „für fast alle n und m“ führe ich die abkürzende Schreibweise $\ddot{\forall} n, m \in \mathbb{N}$ ein:

Definition 3.5 (Zweistelliger Fast-Alle-Quantor)**.** Eine Aussage $\ddot{\forall} n, m \in \mathbb{N} : A(n,m)$ ist genau dann wahr, wenn es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass die Aussageform $A(n,m)$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ und $m \geq N$ erfüllt ist. $\ddot{\forall} n, m \in \mathbb{N} : A(n,m)$ bedeutet also „Für fast alle $n, m \in \mathbb{N}$ ist $A(n,m)$ wahr“. Es ist somit:

$$\ddot{\forall} n, m \in \mathbb{N} : A(n,m) :\Leftrightarrow \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n, m \in \mathbb{N}\, (n \geq N \wedge m \geq N \Rightarrow A(n,m)) \tag{3.44}$$

Bemerkung. Beachte, dass $\ddot{\forall} n, m \in \mathbb{N} : A(n,m) \not\Leftrightarrow \ddot{\forall} n \in \mathbb{N} \ddot{\forall} m \in \mathbb{N} : A(n,m)$ ist. So ist für alle $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $\ddot{\forall} m \in \mathbb{N} : n < m$ wahr und somit $\ddot{\forall} n \in \mathbb{N} \ddot{\forall} m \in \mathbb{N} : n < m$ erfüllt. Jedoch ist $\ddot{\forall} n, m \in \mathbb{N} : n < m$ eine falsche Aussage, weil für alle $N \in \mathbb{N}$ die Aussage $N < N$ falsch ist.

Wie für den einstelligen Fast-Alle-Quantor ist auch für den zweistelligen Fast-Alle-Quantor die Konjunktionseigenschaft erfüllt (siehe Satz 3.1):

Satz 3.7 (Konjungktionseigenschaft des zweistelligen Fast-Alle-Quantors)**.** *Seien $A(n,m)$ und $B(n,m)$ Aussageformen in den freien Variablen n und m. Es ist:*

$$\begin{aligned} &\left(\ddot{\forall} n, m \in \mathbb{N} : A(n,m)\right) \wedge \left(\ddot{\forall} n, m \in \mathbb{N} : B(n,m)\right) \\ \Rightarrow\ &\ddot{\forall} n, m \in \mathbb{N} : (A(n,m) \wedge B(n,m)) \end{aligned} \tag{3.45}$$

Beweis.

$$\left(\ddot{\forall} n, m \in \mathbb{N} : A(n,m)\right) \wedge \left(\ddot{\forall} n, m \in \mathbb{N} : B(n,m)\right) \tag{3.46}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ &\left(\underset{\text{def}}{\exists} N_A \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} : (n \geq N_A \wedge m \geq N_A \Rightarrow A(n,m))\right) \\ &\wedge \left(\underset{\text{def}}{\exists} N_B \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} : (n \geq N_B \wedge m \geq N_B \Rightarrow B(n,m))\right) \end{aligned} \tag{3.47}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \forall n, m \in \mathbb{N} : \Big(&n \geq \max\{N_A, N_B\} \wedge m \geq \max\{N_A, N_B\} \\ &\Rightarrow A(n,m) \wedge B(n,m)\Big) \end{aligned} \tag{3.48}$$

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} : (n \geq N \wedge m \geq N \Rightarrow A(n,m) \wedge B(n,m)) \tag{3.49}$$

$$\Rightarrow \ddot{\forall} n, m \in \mathbb{N} : (A(n,m) \wedge B(n,m)) \tag{3.50}$$

□

In dieser Bachelorarbeit werde ich auch auf folgende Eigenschaft des zweistelligen Fast-Alle-Quantors zurück greifen:

Satz 3.8 (Erhöhungssatz der Stelligkeit für den Fast-Alle-Quantor)**.** *Sei $A(n)$ eine Aussageform mit der freien Variablen n. Es ist:*

$$\ddot{\forall} n \in \mathbb{N} : A(n) \Rightarrow \ddot{\forall} n, m \in \mathbb{N} : (A(n) \wedge A(m)) \tag{3.51}$$

Beweis.

$$\ddot{\forall} n \in \mathbb{N} : A(n) \tag{3.52}$$

$$\Rightarrow \underset{\text{def}}{\exists} N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq N \Rightarrow A(n)) \tag{3.53}$$

$$\Rightarrow \ (\forall n \in \mathbb{N} : (n \geq N \Rightarrow A(n))) \wedge (\forall m \in \mathbb{N} : (m \geq N \Rightarrow A(m))) \tag{3.54}$$

$$\Rightarrow \forall n, m \in \mathbb{N} : (n \geq N \wedge m \geq N \Rightarrow A(n) \wedge A(m)) \tag{3.55}$$

$$\Rightarrow \ddot{\forall} n, m \in \mathbb{N} : (A(n) \wedge A(m)) \tag{3.56}$$

□

3.2.2 Definition ε-ungefähre Cauchyfolge

Analog zur Definition der ε-ungefähr konvergenten Folge lässt sich die Definition der ε-ungefähren Cauchyfolge formulieren:

Definition 3.6 (ε-ungefähre Cauchyfolge)**.** Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eines metrisches Raums (X, d) heißt *ε-ungefähre Cauchyfolge*, wenn $\ddot{\forall} n, m \in \mathbb{N} : x_n \approx_{\leq\varepsilon} x_m$, wenn es also ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle natürlichen Zahlen $n, m \geq N$ die Relation $x_n \approx_{\leq\varepsilon} x_m$ erfüllt ist.

Auch diese Definition ist bereits in der klassischen Definition der Cauchyfolge enthalten:

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist eine Cauchyfolge} \tag{3.57}$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ddot{\forall} n, m \in \mathbb{N} : d(x_n, x_m) \leq \varepsilon \tag{3.58}$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist eine } \varepsilon\text{-ungefähre Cauchyfolge} \tag{3.59}$$

3.2.3 Zusammenhang ε-ungefähre Cauchyfolge und ε-ungefähre Konvergenz

In der klassischen Analysis ist jede konvergente Folge eine Cauchyfolge und für vollständige Räume gilt auch die Umkehrung. Wie sieht nun der Zusammenhang zwischen ε-ungefährer Konvergenz und ε-ungefährer Cauchyfolge aus?

Der folgende Satz beweist, dass jede ε-ungefähr konvergente Folge eine 2ε-ungefähre Cauchyfolge ist:

Satz 3.9. *Jede ε-ungefähr konvergente Folge eines metrischen Raums (X, d) ist eine 2ε-ungefähre Cauchyfolge.*

Beweis.

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \ \varepsilon\text{-ungefähr konvergent} \tag{3.60}$$

$$\Rightarrow \underset{\text{def}}{\exists} x_g \in X \, \ddot{\forall} n \in \mathbb{N} : x_n \approx_{\leq\varepsilon} x_g \tag{3.61}$$

$$\downarrow \text{Erhöhungssatz für Stelligkeit (Satz 3.8)}$$

$$\Rightarrow \ddot{\forall} n, m \in \mathbb{N} : (x_n \approx_{\leq \varepsilon} x_g \wedge x_m \approx_{\leq \varepsilon} x_g) \tag{3.62}$$

$$\downarrow \text{ schwache Transitivitätseigenschaft (Satz 2.1)}$$

$$\Rightarrow \ddot{\forall} n, m \in \mathbb{N} : x_n \approx_{\leq 2\varepsilon} x_m \tag{3.63}$$

$$\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist } 2\varepsilon\text{-ungefähre Cauchyfolge} \tag{3.64}$$

□

Dass obiger Satz nicht schärfer formuliert werden kann, siehst du an der Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{R}$ mit Standardmetrik. Diese Folge ist 1-ungefähr konvergent gegen 0, aber für alle reellen Zahlen $0 \leq \varepsilon < 1$ ist die Folge keine 2ε-ungefähre Cauchyfolge.

In allen metrischen Räumen lässt sich folgende Variante der Umkehrung beweisen:

Satz 3.10. *Jede ε-ungefähre Cauchyfolge eines metrischen Raums ist ε-ungefähr konvergent.*

Beweis.

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist eine } \varepsilon\text{-ungefähre Cauchyfolge} \tag{3.65}$$

$$\Rightarrow \ddot{\forall} n, m \in \mathbb{N} : x_n \approx_{\leq \varepsilon} x_m \tag{3.66}$$

$$\underset{\text{def}}{\Rightarrow} \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} : (n \geq N \wedge m \geq N \Rightarrow x_n \approx_{\leq \varepsilon} x_m) \tag{3.67}$$

$$\downarrow \text{ Wähle } m = N$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq N \Rightarrow x_n \approx_{\leq \varepsilon} x_N) \tag{3.68}$$

$$\Rightarrow \ddot{\forall} n \in \mathbb{N} : x_n \approx_{\leq \varepsilon} x_N \tag{3.69}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n \approx_{\leq \varepsilon} x_N \tag{3.70}$$

$$\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist } \varepsilon\text{-ungefähr konvergent} \tag{3.71}$$

□

Damit folgt für ε-ungefähre Cauchyfolgen, dass diese δ-ungefähr konvergente Folgen sind, und umgekehrt, wobei ε und δ jeweils von der anderen Größe abhängen (je nachdem, welche Implikationsrichtung man gerade betrachtet). Dies beweist direkt, dass jede ε-ungefähre Cauchyfolge beschränkt ist:

Satz 3.11 (Beschränktheit ε-ungefährer Cauchyfolgen)**.** *Jede ε-ungefähre Cauchyfolge ist beschränkt.*

Beweis. Nach obigen Satz 3.10 ist jede ε-ungefähre Cauchyfolge auch ε-ungefähr konvergent und damit nach dem Satz über die Beschränktheit ε-ungefähr konvergenter Folgen (Satz 3.4) beschränkt. □

3.3 ε-ungefähre Variante des Vollständigkeitsaxiom in $\mathbb{R}$ mit Standardmetrik

In diesem Abschnitt betrachte ich als Grundmenge die Menge der reellen Zahlen mit der durch die Betragsnorm induzierten Standardmetrik. Nach der Definition 3.6 der ε-ungefähren Cauchyfolge liegen fast alle Folgenglieder einer 2ε-ungefähren Cauchyfolge in einem abgeschlossenen Intervall der Länge 2ε. Der Mittelpunkt dieses Intervalls ist dann ein Punkt, dessen Abstand zu allen anderen Punkten des Intervalls und damit zu fast allen Folgengliedern kleiner gleich ε ist. Somit ist dieser Mittelpunkt ε-ungefährer Grenzwert der Folge und die Folge ε-ungefähr konvergent. Diese Überlegung führt zu folgenden Satz:

Satz 3.12 (ε-ungefähre Variante des Vollständigkeitsaxiom für $\mathbb{R}$)**.** *In der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit der Standardmetrik ist jede bezüglich $\approx_{\leq\varepsilon}$ 2ε-ungefähre Cauchyfolge ε-ungefähr konvergent bezüglich $\approx_{\leq\varepsilon}$.*

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine 2ε-ungefähre Cauchyfolge reeller Zahlen. Es gibt dann ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n \approx_{\leq 2\varepsilon} x_m$ für alle natürlichen Zahlen $n, m \geq N$. Da nach Satz 3.11 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, existiert das Supremum $S := \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}_{\geq N}\}$ und das Infimum $I := \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}_{\geq N}\}$. Die Länge des Intervalls $[S, I]$ ist 2ε:

$$\begin{aligned}
|S - I| &\overset{S \geq I}{=} S - I \\
&= \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}_{\geq N}\} - \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}_{\geq N}\} \\
&\qquad \downarrow\ -\sup(M) = \sup(-M) \\
&= \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}_{\geq N}\} + \sup\{-x_n : n \in \mathbb{N}_{\geq N}\} \\
&\qquad \downarrow\ \sup(A) + \sup(B) = \sup\{x + y : x \in A \wedge y \in B\} \\
&= \sup\{\underbrace{x_n - x_m}_{\leq 2\varepsilon} : n, m \in \mathbb{N}_{\geq N}\} \\
&\leq 2\varepsilon
\end{aligned}$$

Sei $g := \frac{1}{2} \cdot (S + I)$ der Mittelpunkt des Supremums S und des Infimums I. Sei n eine beliebige natürliche Zahl größer gleich N. Nach Definition von S und I ist $I \leq x_n \leq S$. Es ist

$$I - g \leq x_n - g \leq S - g \tag{3.72}$$

$$\Rightarrow\ -\varepsilon \leq x_n - g \leq \varepsilon \tag{3.73}$$

$$\Rightarrow |x_n - g| \leq \varepsilon \tag{3.74}$$

Damit ist $x_n \approx_{\leq\varepsilon} g$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq N}$ und somit g ein ε-ungefährer Grenzwert der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Bemerkung. Obiger Satz gilt nur für die Kleiner-Gleich-Abstandsrelation $\approx_{\leq\varepsilon}$ und nicht für die Kleiner-Abstandsrelation $\approx_{<\varepsilon}$. Nehme zum Beispiel die Folge mit den Folgengliedern

$$1; -1+2^{-1}; 1; -1+2^{-2}; 1; -1+2^{-3}; 1; -1+2^{-4}; 1; -1+2^{-5}; \ldots$$

Diese Folge ist eine 2-ungefähre Cauchyfolge bezüglich $\approx_{<2}$, weil alle Folgenglieder im Intervall $]-1,1]$ liegen. Sie ist aber nicht 1-ungefähr konvergent bezüglich $\approx_{<1}$. Sei nämlich x_g ein 1-ungefährer Grenzwert der Folge. Weil unendlich viele Folgenglieder 1 sind und fast alle Folgenglieder von x_g den Abstand kleiner 1 besitzen, muss $x_g > 0$ sein. Da aber die Folge -1 als Häufungspunkte besitzt, gibt es unendlich viele Folgenglieder kleiner als $-1+x_g$. Dies steht aber im Widerspruch dazu, dass x_g zu fast allen Folgegliedern den Abstand kleiner 1 besitzt.

Im Beweis zum obigen Satz bilden wir das Supremum und das Infimum einer beschränkten Menge und nutzen so das Vollständigkeitsaxiom der reellen Zahlen. Dass das Vollständigkeitaxiom zur Beweisführung notwendig ist, deutet folgendes Gegenbeispiel aus der Grundmenge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ an:

Beispiel 3.2. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine rationale Folge aus dem Intervall $]\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1[$, die gegen $\sqrt{2}+1$ konvergiert. Die Folge $\left(\sqrt{2}+(-1)^n\cdot(x_n-\sqrt{2})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine 2ε-ungefähre Cauchyfolge, weil sie komplett im Intervall $]\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1[$ liegt. Jedoch besitzt die Folge die Zahlen $\sqrt{2}-1$ und $\sqrt{2}+1$ als Häufungspunkte, so dass der einzige 1-ungefähre Grenzwert dieser Folge die Zahl $\sqrt{2}$ sein kann. Da aber $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ ist, ist die Folge nicht 1-ungefähr konvergent in $\mathbb{Q}$.

Dass das Vollständigkeitsaxiom nicht nur hinreichend sondern auch notwendig für die Beweisführung ist, werde ich im folgenden Satz beweisen:

Satz 3.13. *Die ε-ungefähre Variante des Vollständigkeitsaxiom ist äquivalent zum klassischen Vollständigkeitsaxiom. Es gilt also:*

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_0^+ : \left((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist } 2\varepsilon\text{-ungefähre Cauchyfolge} \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist } \varepsilon\text{-ungefähr konvergent}\right)$$

$$\Leftrightarrow$$

Jede Cauchyfolge reeller Zahlen konvergiert

Bemerkung. Dieser Satz gilt nur für die Kleiner-Gleich-Abstandsrelation $\approx_{\leq\varepsilon}$, wie ich beim vorherigen Satz bereits angemerkt habe.

Lösungsweg. Die erste Implikationsrichtung habe ich bereits im Satz 3.12 bewiesen. Die andere Implikationsrichtung werde ich durch Kontraposition beweisen. Ich gehe also davon aus, dass in $\mathbb{R}$ das Vollständigkeitsaxiom nicht erfüllt ist und beweise aus dieser Annahme, dass dann die ε-ungefähre Variante des Vollständigkeitsaxioms falsch ist. Sei also $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine divergierende Cauchyfolge reeller Zahlen. Mit dieser Folge will ich nun beweisen, dass es eine 2ε-ungefähre Cauchyfolge gibt, die nicht ε-ungefähr konvergiert.

Hierzu orientiere ich mich am obigen Beispiel 3.2. Stell dir vor, $\tilde{x}$ wäre die „Lücke“ in $\mathbb{R}$, gegen die $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Wenn ich eine Folge konstruieren kann, die zum einen fast immer im Intervall $[\tilde{x}-1, \tilde{x}+1]$ liegt und die zum anderen $\tilde{x}-1$ und $\tilde{x}+1$ als Häufungspunkte besitzt, dann ist diese Folge eine 2-ungefähre Cauchyfolge, die 1-ungefähr divergiert.

Das Problem ist aber, dass $\tilde{x}$ nach Voraussetzung nicht in $\mathbb{R}$ existiert und ich es somit nicht im Beweis verwenden kann. Was tun?

Ich kann eine neue Folge bilden, indem ich den Folgengliedern x_n abwechselnd Folgenglieder einer gegen 1 konvergenten Folge hinzuaddiere und abziehe. Die Ergebnisfolge sollte bei geeigneter Wahl der gegen 1 konvergenten Folge obigen Anforderungen genügen. Sei also $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine nicht negative Nullfolge. Ich bilde eine neue Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den Folgengliedern:

$$x_0+(1-h_0);\ x_1-(1-h_1);\ x_2+(1-h_2);\ x_3-(1-h_3);\ x_4+(1-h_4);\ \ldots$$

Es ist also $y_n := x_n + (-1)^n \cdot (1-h_n)$. Welche Eigenschaften muss h_n erfüllen?

Zunächst müssen fast alle Paare von Folgegliedern y_n und y_m einen Abstand kleiner gleich 2 besitzen. Schauen wir uns an, wann dies der Fall ist (im Folgenden ist $[n]_2$ die Restklassenmenge vom Repräsentanten $n\in\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$):

$$|y_n - y_m| = |(x_n + (-1)^n\cdot(1-h_n)) - (x_m + (-1)^m \cdot (1-h_m))| \tag{3.75}$$

$$= \left|(x_n - x_m) + \left\{\begin{array}{ll} h_m - h_n & ; n,m \text{ gerade} \\ h_n - h_m & ; n,m \text{ ungerade} \\ 2 - h_n - h_m & ; n \text{ gerade und } m \text{ ungerade} \\ h_n + h_m - 2 & ; n \text{ ungerade und } m \text{ gerade} \end{array}\right\}\right| \tag{3.76}$$

$$\leq |x_n - x_m| + \left\{\begin{array}{ll} |h_n - h_m| & ; [n]_2 = [m]_2 \\ |2 - h_n - h_m| & ; [n]_2 \neq [m]_2 \end{array}\right\} \tag{3.77}$$

$$\downarrow \text{ unter der Annahme } h_n \leq 1 \wedge h_m \leq 1$$

$$= \left\{\begin{array}{ll} |x_n - x_m| + |h_n - h_m| & ; [n]_2 = [m]_2 \\ 2 + |x_n - x_m| - (h_n + h_m) & ; [n]_2 \neq [m]_2 \end{array}\right\} \overset{!}{\leq} 2 \tag{3.78}$$

Der letzte Ausdruck in geschweiften Klammern soll kleiner gleich 2 sein. Dies ist erfüllt, wenn für fast alle $n, m \in \mathbb{N}$ folgende Bedingungen gelten (Die Annahme $h_n \leq 1$ und $h_m \leq 1$ wurde bereits in der Gleichungsumformung verwendet):

(a) $h_n \leq 1 \wedge h_m \leq 1$

(b) $|h_n - h_m| \leq 1$

(c) $|x_n - x_m| \leq 1$

(d) $|x_n - x_m| \leq h_n + h_m$

Die erste und die zweite Bedingung ist bereits dann erfüllt, wenn $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Die dritte Bedingung ergibt sich aus der Voraussetzung, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Nur die vierte Bedingung macht noch Schwierigkeiten und es muss $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ geschickt definiert werden.

Nach einiger Zeit des Nachdenkens bin ich auf folgende Lösung gekommen:

$$(h_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\sup\{|x_k - x_l| : k, l \in \mathbb{N}_{\geq n}\})_{n\in\mathbb{N}} \tag{3.79}$$

Beweis. Wegen Satz 3.12 ist nur noch zu beweisen, dass aus der ε-ungefähren Variante des Vollständigkeitsaxioms das Vollständigkeitsaxiom der reellen Zahlen folgt. Dies beweise ich durch Kontraposition. Sei hierzu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge von reellen Zahlen, die in $\mathbb{R}$ nicht konvergiert. Sei weiterhin die Folge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $h_n := \sup\{|x_k - x_l| : k, l \in \mathbb{N}_{\geq n}\}$. Die Suprema existieren, weil $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als Cauchyfolge beschränkt ist. Außerdem folgt direkt aus der Definition, dass $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine nicht negative Folge reeller Zahlen ist.

Behauptung: $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine nicht negative Nullfolge.

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist eine Cauchyfolge} \tag{3.80}$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \Big[$$

$$\underset{\text{def}}{\exists} N \in \mathbb{N}\, \forall k, l \in \mathbb{N}_{\geq N} : |x_k - x_l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_{\geq N} : |h_n| = \sup\{\underbrace{|x_k - x_l|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} : k, l \in \mathbb{N}_{\geq n}\} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \tag{3.81}$$

$$\Big]$$

$$\Rightarrow (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist eine Nullfolge} \tag{3.82}$$

Aufgrund der Definition von $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist für alle $n, m \in \mathbb{N}$:

$$|x_n - x_m| \leq \sup\{|x_k - x_l| : k, l \in \mathbb{N}_{\geq n}\} + \sup\{|x_k - x_l| : k, l \in \mathbb{N}_{\geq m}\} \tag{3.83}$$

$$= h_n + h_m \tag{3.84}$$

Somit ist für alle Indizes n und m die Ungleichung $|x_n - x_m| - h_n - h_m \leq 0$ erfüllt. Sei nun die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $y_n := x_n + (-1)^n(1 - h_n)$.

Behauptung: $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine 2-ungefähre Cauchyfolge.

Wähle $N \in \mathbb{N}$ so hinreichend groß, dass für alle $n, m \in \mathbb{N}_{\geq N}$ folgende Bedingungen gelten:

(a) $h_n \leq 1 \wedge h_m \leq 1$

(b) $|h_n - h_m| \leq 1$

(c) $|x_n - x_m| \leq 1$

N existiert, weil $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Seien nun $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ und $m \geq N$ beliebig. Es ist:

$$|y_n - y_m| = |(x_n + (-1)^n \cdot (1 - h_n)) - (x_m + (-1)^m \cdot (1 - h_m))| \tag{3.85}$$

$$= \left|(x_n - x_m) + \left\{\begin{array}{ll} h_m - h_n & ; n, m \text{ gerade} \\ h_n - h_m & ; n, m \text{ ungerade} \\ 2 - h_n - h_m & ; n \text{ gerade und } m \text{ ungerade} \\ h_n + h_m - 2 & ; n \text{ ungerade und } m \text{ gerade} \end{array}\right\}\right| \tag{3.86}$$

$$\leq |x_n - x_m| + \left\{\begin{array}{ll} |h_n - h_m| & ; [n]_2 = [m]_2 \\ |2 - h_n - h_m| & ; [n]_2 \neq [m]_2 \end{array}\right\} \tag{3.87}$$

$$= \left\{\begin{array}{ll} |x_n - x_m| + |h_n - h_m| & ; [n]_2 = [m]_2 \\ 2 + |x_n - x_m| - (h_n + h_m) & ; [n]_2 \neq [m]_2 \end{array}\right\} \tag{3.88}$$

$$\leq 2 \tag{3.89}$$

Damit ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine 2-ungefähre Cauchyfolge.

Behauptung: $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist keine 1-ungefähr konvergente Folge.

Widerspruchsbeweis: Nehmen wir an, die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt einen 1-ungefähren Grenzwert y_g. Dann gibt es ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $y_n \approx_{\leq 1} y_g$ also $|y_n - y_g| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq N_1}$. Für alle geraden Zahlen $2n$ größer gleich N_1 gilt

$$\begin{array}{rrl} & y_{2n} - y_g & \leq 1 \\ \Rightarrow & x_{2n} + 1 - h_{2n} - y_g & \leq 1 \\ \Rightarrow & x_{2n} - y_g & \leq h_{2n} \end{array} \tag{3.90}$$

und für alle ungeraden Zahlen $2n+1$ größer gleich N_1 ist

$$\begin{array}{rrl} & y_{2n+1} - y_g & \geq -1 \\ \Rightarrow & x_{2n+1} - 1 + h_{2n+1} - y_g & \geq -1 \\ \Rightarrow & x_{2n+1} - y_g & \geq -h_{2n+1} \end{array} \tag{3.91}$$

Sei nun $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig. Sei $N_2 \in \mathbb{N}$, so dass für alle natürlichen Zahlen $k \geq N_2$ die Ungleichung $|h_k| < \frac{\varepsilon}{2}$ erfüllt ist. N_2 existiert, weil $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Außerdem existiert ein $N_3 \in \mathbb{N}$, so dass $|x_k - x_l| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $k, l \in \mathbb{N}_{\geq N_3}$ ist. Wähle $N := \max\{N_1, N_2, N_3\}$. Für alle geraden natürlichen Zahlen $2n$ mit $2n \geq N$ ist:

$$\varepsilon > h_{2n} \geq x_{2n} - y_g = \underbrace{x_{2n+1} - y_g}_{\geq -h_{2n+1}} + \underbrace{x_{2n} - x_{2n+1}}_{> -\frac{\varepsilon}{2}} \geq \underbrace{-h_{2n+1}}_{> -\frac{\varepsilon}{2}} - \frac{\varepsilon}{2} > -\varepsilon \tag{3.92}$$

und damit $|x_{2n} - y_g| < \varepsilon$. Außerdem ist für alle ungeraden Zahlen $2n+1$ mit $2n+1 \geq N$:

$$-\varepsilon < -h_{2n+1} \leq x_{2n+1} - y_g = \underbrace{x_{2n+2} - y_g}_{\leq h_{2n+2}} + \underbrace{x_{2n+1} - x_{2n+2}}_{< \frac{\varepsilon}{2}} \leq \underbrace{h_{2n+2}}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \tag{3.93}$$

und somit $|x_{2n+1} - y_g| < \varepsilon$. Insgesamt ist also $|x_n - y_g| < \varepsilon$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq N$, was beweist, dass y_g Grenzwert der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Dies steht aber im Widerspruch dazu, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Voraussetzung divergiert. □

Der gerade bewiesene Satz ist sehr interessant. Er zeigt, dass in der klassischen Analysis das Vollständigkeitsaxiom durch seine ε-ungefähre Variante ersetzt werden kann, weil beide Aussagen äquivalent zueinander sind. Dieses Ergebnis lässt mich hoffen, dass es für alle Axiome der klassischen Analysis eine zu ihnen äquivalente ε-ungefähre Variante gibt. So könnte man die Grundlage einer neuen Analysis schaffen.

Bemerkung. Mein Freund Dirk Kretschmann hat mich darauf aufmerksam gemacht, dass obiger Satz nicht auf höherdimensionale euklidische Räume verallgemeinert werden kann. Stelle dir im $\mathbb{R}^2$ für ein beliebiges $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 2ε vor. Nehme nun eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die alternierend die Ecken des Dreiecks durchläuft. Diese Folge ist eine 2ε-ungefähre Cauchyfolge. Jedoch ist diese Folge nur $\frac{2}{3}\sqrt{3}\varepsilon$-ungefähr konvergent, weil der Mittelpunkt des Dreiecks zu den Eckpunkten einen Abstand $\frac{2}{3}\sqrt{3}\varepsilon$ besitzt[3]. Wegen $\frac{2}{3}\sqrt{3} = 1.154\ldots > 1$ ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht ε-ungefähr konvergent.

3.4 ε-ungefähre Häufungspunkte

3.4.1 Der Unendlich-Viele-Quantor

Wie in den vorherigen Abschnitten führe ich auch in diesem eine neue abkürzende Schreibweise ein. Diesmal soll sie für die Aussage „Für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ ist $A(n)$“ stehen:

Definition 3.7 (Unendlich-Viele-Quantor)**.** Eine Aussage $\dot{\forall} n \in \mathbb{N} : A(n)$ ist genau dann wahr, wenn es unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass die Aussageform $A(n)$ erfüllt ist. $\dot{\forall} n \in \mathbb{N} : A(n)$ bedeutet also „Für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ ist $A(n)$ erfüllt“. Es ist somit:

$$\dot{\forall} n \in \mathbb{N} : A(n) :\Leftrightarrow \forall N \in \mathbb{N}\, \exists n \in \mathbb{N} : (n \geq N \wedge A(n)) \tag{3.94}$$

Ich werde die Eigenschaften des Unendlich-Viele-Quantors nicht untersuchen, da ich diesen kaum benutzen werde. Ich will aber anmerken, dass der Unendlich-Viele-Quantor nicht die Konjunktionseigenschaft (Satz 3.1) des Fast-Alle-Quantors teilt. So ist $\dot{\forall} n \in \mathbb{N} : (n \text{ gerade})$ und $\dot{\forall} n \in \mathbb{N} : (n \text{ ungerade})$, aber die Aussage $\dot{\forall} n \in \mathbb{N} : (n \text{ gerade} \wedge n \text{ ungerade})$ ist falsch.

3.4.2 Definition des ε-ungefähren Häufungspunkts

Auch eine Definition des ε-ungefähren Häufungspunkts gibt es:

Definition 3.8 (ε-ungefährer Häufungspunkt)**.** Sei (X, d) ein metrischer Raum. Ein Punkt $h \in X$ heißt *ε-ungefährer Häufungspunkt* einer aus X stammenden Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn für unendlich viele Folgenglieder x_n die Relation $x_n \approx_{\leq\varepsilon} h$ erfüllt ist, wenn also $\dot{\forall} n \in \mathbb{N} : x_n \approx_{\leq\varepsilon} h$.

Aus der Definition folgt direkt, dass h genau dann ein ε-ungefährer Häufungspunkt von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist, wenn eine Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ε-ungefähr gegen h konvergiert. Außerdem ist auch diese Definition direkt der klassischen Definition abgeleitet:

$$h \text{ ist Häufungspunkt von } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \tag{3.95}$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \dot{\forall} n \in \mathbb{N} : x_n \in \mathrm{B}_{\leq\varepsilon}(h) \tag{3.96}$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : h \text{ ist } \varepsilon\text{-ungefährer Häufungspunkt von } h \tag{3.97}$$

3.4.3 Satz von Bolzano-Weierstraß

Ich werde nun die ε-ungefähre Variante des Satzes von Bolzano-Weierstraß beweisen.

Satz 3.14 (ε-ungefähre Variante des Satzes von Bolzano-Weierstraß)**.** *Jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eines kompakten Raums (X, d) besitzt für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ einen ε-ungefähren Häufungspunkt.*

Bemerkung. Aus dem obigen Satz folgt direkt, dass jede beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eines endlich dimensionalen und normierten Vektorraums über $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$ für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ einen ε-ungefähren Häufungspunkt besitzt, weil der Abschluss der Menge $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ kompakt ist (Satz von Heine-Borel[9][14, Seite 30, Satz 5]).

Beweis. $\bigcup_{x\in X} \mathrm{B}_{<\varepsilon}(x)$ ist eine offene Überdeckung von X. Da X kompakt ist, gibt es endlich viele Punkte $\tilde{x}_1$ bis $\tilde{x}_m$, so dass $X \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} \mathrm{B}_{<\varepsilon}(\tilde{x}_k)$ ist. Da die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unendlich viele Folgenglieder besitzt und es nur endlich viele offene Bälle $\mathrm{B}_{<\varepsilon}(\tilde{x}_k)$ gibt, existiert mindestens ein offener Ball $\mathrm{B}_{<\varepsilon}(\tilde{x}_k)$, in dem unendlich viele Folgenglieder x_n liegen. Es ist dann $\dot{\forall} n \in \mathbb{N} : x_n \approx_{\leq\varepsilon} \tilde{x}_k$ und somit $\tilde{x}_k$ ε-ungefährer Häufungspunkt der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. $\square$

Kapitel 4

Stetigkeit

4.1 ε-δ-ungefähre Stetigkeit an einer Stelle

4.1.1 Definition der ε-δ-ungefähren Stetigkeit an einer Stelle

In der Nichtstandardanalysis wird Stetigkeit einer Funktion f an der Stelle x_0 so definiert, dass infinitesimale Änderungen des reellen Arguments x_0 nur infinitesimale Änderungen des Funktionswerts $f(x_0)$ hervorrufen[17, Theorem 7.1.3, Seite 77]. Diese Definition diente mir als Vorbild für meine Definition der ε-δ-ungefähr stetigen Funktion $f : X \to Y$ an der Stelle $x_0 \in X$:

Definition 4.1 (ε-δ-ungefähr stetige Funktion in einem Punkt)**.** Sei $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ eine Funktion zwischen zwei metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y). Diese Funktion heißt *ε-δ-ungefähr stetig im Punkt* $x_0 \in X$, wenn für alle $y \in X$ mit $x_0 \approx_{\leq \delta} y$ die Relation $f(x_0) \approx_{\leq \varepsilon} f(y)$ erfüllt ist.

Diese Definition kommt auch in der klassischen ε-δ-Definition der Stetigkeit in einem Punkt vor:

$$f : (X, d_X) \to (Y, d_Y) \text{ stetig im Punkt } x_0 \in X \tag{4.1}$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \, \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \, \forall y \in X : (d_X(x_0, y) \leq \delta \Rightarrow d_Y(f(x_0), f(y)) \leq \varepsilon) \tag{4.2}$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \, \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : f \text{ ist } \varepsilon\text{-}\delta\text{-ungefähr stetig im Punkt } x_0 \tag{4.3}$$

Eine reelle Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann ε-δ-ungefähr stetig im Punkt x, wenn keine Funktionswerte oberhalb oder unterhalb des um den Punkt $(x, f(x))$ gedachten Rechtecks mit den Seitenlängen 2ε und 2δ liegen[1]:

[1] Im Diagramm ist im Übrigen der Indexverlauf des DAX im Zeitraum vom 01.01.2001 bis zum 30.12.2010 dargestellt. (Quelle der Daten: `http://www.ariva.de/dax-index/historische_kurse?boerse_id=12`, abgerufen am 28.01.2012)

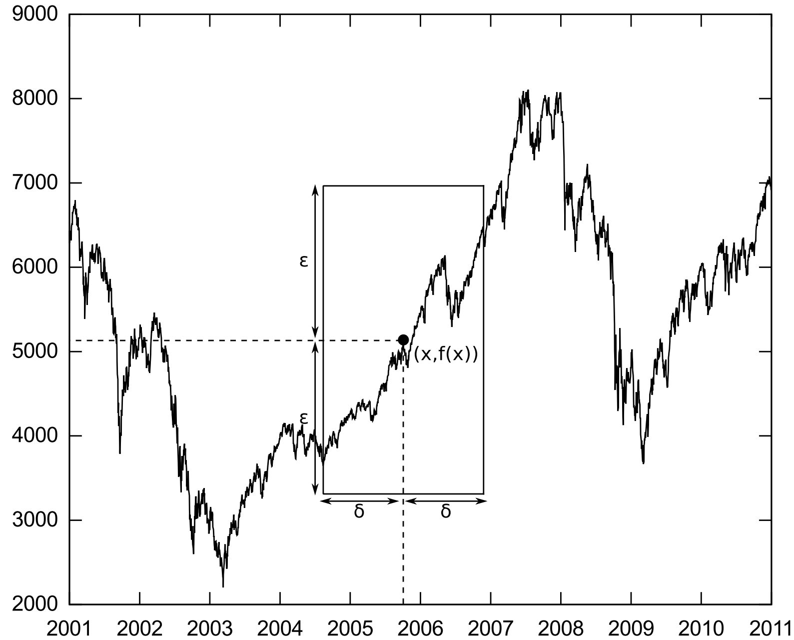

Abbildung 4.1: ε-δ-ungefähr stetige Funktion f an der Stelle x mit eingezeichnetem 2ε-2δ-Rechteck

4.1.2 Ester-Quantor

Charakteristische Idee der obigen Definition ist die Aussageform $\forall y \in X : (d_X(x_0, y) \leq \delta \Rightarrow d_Y(f(x_0), f(y)) \leq \varepsilon)$. Um eine kurze Notation dieser Aussageform zu haben, fasse ich sie in einer abkürzenden Schreibweise zusammen, so wie ich es auch in den vorherigen Abschnitten zur Folgenkonvergenz getan habe:

Definition 4.2 (Ester-Quantor)**.** Eine Aussage $\forall y \approx_{\leq \delta} x_0 : A(y)$ für ein $x_0 \in X$ ist genau dann wahr, wenn für alle $y \in X$ des metrischen Grundraums (X, d) mit $y \approx_{\leq \delta} x_0$ die Aussage $A(y)$ erfüllt ist:

$$\forall y \approx_{\leq \delta} x_0 : A(y) :\Leftrightarrow \forall y \in X : (y \approx_{\leq \delta} x_0 \Rightarrow A(y)) \tag{4.4}$$

Damit kann ich ε-δ-ungefähre Stetigkeit im Punkt x_0 so definieren:

$$f \text{ ist } \varepsilon\text{-}\delta\text{-ungefähr stetig im Punkt } x_0 \Leftrightarrow \forall y \approx_{\leq \delta} x_0 : f(y) \approx_{\leq \varepsilon} f(x_0) \tag{4.5}$$

Bemerkung. Ich habe leider keinen sprechenden Namen für den Quantor $\forall y \approx_{\leq \delta} x_0$ gefunden. Aus der Not ihn zu benennen, habe ich ihn einfach „Ester-Quantor“ getauft. Beachte, dass du „Ester“ wie „Äster“ aussprechen musst, wie mir die Wikipedia verraten hat[2].

[2] siehe Wikipedia-Artikel „Königin Ester“

4.1.3 Folgenkriterium für ε-δ-ungefähre Stetigkeit an einer Stelle

In der klassischen Analysis gibt es neben der ε-δ-Definition der Stetigkeit auch die Möglichkeit, diese über das Folgenkriterium zu definieren. Es gilt nämlich folgende Äquivalenz:

$$
\begin{aligned}
& f : (X, d_X) \to (Y, d_Y) \text{ stetig im Punkt } x_0 \in X && (4.6)\\
\Leftrightarrow\ & \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) && (4.7)\\
\Leftrightarrow\ & \forall\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \Bigg(\Big(\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in X \Big) \wedge \Big(\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Big) \Rightarrow \Big(\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) \Big) \Bigg) && (4.8)
\end{aligned}
$$

Gibt es auch einen ähnlichen Zusammenhang in dieser Analysis? Hierzu brauche ich zunächst eine ε-δ-ungefähre Variante des klassischen Ausdrucks $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$:

Definition 4.3 (ε-δ-ungefähre Funktionskonvergenz)**.** Sei f eine Funktion $(X, d_X) \to (Y, d_Y)$, $x_0 \in X$ und $y_0 \in Y$. Im Folgenden schreibe ich $\lim\limits_{\substack{x \rightsquigarrow x_0 \\ \leq\delta}} f(x) \approx_{\leq\varepsilon} y_0$, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus X mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \approx_{\leq\delta} x_0$ auch $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \approx_{\leq\varepsilon} y_0$ gilt.

Ist nun eine Funktion $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ an einer Stelle x_0 genau dann ε-δ-ungefähr stetig, wenn $\lim\limits_{\substack{x \rightsquigarrow x_0 \\ \leq\delta}} f(x) \approx_{\leq\varepsilon} f(x_0)$ ist? Ja, wie folgende zwei Sätze zeigen:

Satz 4.1 (Charakterisierungssatz der ε-δ-ungefähren Funktionskonvergenz)**.** *Es ist genau dann* $\lim\limits_{\substack{x \rightsquigarrow x_0 \\ \leq\delta}} f(x) \approx_{\leq\varepsilon} y_0$, *wenn* $\forall x \approx_{\leq\delta} x_0 : f(x) \approx_{\leq\varepsilon} y_0$ *ist.*

Beweis. Behauptung: $\forall x \approx_{\leq\delta} x_0 : f(x) \approx_{\leq\varepsilon} y_0 \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x \rightsquigarrow x_0 \\ \leq\delta}} f(x) \approx_{\leq\varepsilon} y_0$.

$$
\begin{aligned}
& \forall\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \Big[\\
& \qquad \lim_{n\to\infty} x_n \approx_{\leq\delta} x_0 \\
& \qquad \Rightarrow \ddot{\forall} n \in \mathbb{N} : x_n \approx_{\leq\delta} x_0 \\
& \qquad \quad \big\downarrow\ \forall x \approx_{\leq\delta} x_0 : f(x) \approx_{\leq\varepsilon} y_0 && (4.9)\\
& \qquad \Rightarrow \ddot{\forall} n \in \mathbb{N} : f(x_n) \approx_{\leq\varepsilon} y_0 \\
& \qquad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) \approx_{\leq\varepsilon} y_0 \\
& \Big]
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x \rightsquigarrow x_0 \\ \leq\delta}} f(x) \approx_{\leq\varepsilon} y_0 \tag{4.10}$$

Behauptung: $\lim\limits_{\substack{x \rightsquigarrow x_0 \\ \leq\delta}} f(x) \approx_{\leq\varepsilon} y_0 \Rightarrow \forall x \approx_{\leq\delta} x_0 : f(x) \approx_{\leq\varepsilon} y_0$.

Beweis durch Kontraposition:

$$\neg\left(\forall x \approx_{\leq\delta} x_0 : f(x) \approx_{\leq\varepsilon} y_0\right) \tag{4.11}$$

$$\Rightarrow \underset{\text{def}}{\exists} \tilde{x} \in X : (\tilde{x} \approx_{\leq\delta} x_0 \land f(\tilde{x}) \not\approx_{\leq\varepsilon} y_0) \tag{4.12}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \tilde{x} \approx_{\leq\delta} x_0 \land \lim_{n\to\infty} f(\tilde{x}) \not\approx_{\leq\varepsilon} y_0 \tag{4.13}$$

$$\Rightarrow \neg\left(\lim_{\substack{x \rightsquigarrow x_0 \\ \leq\delta}} f(x) \approx_{\leq\varepsilon} y_0\right) \tag{4.14}$$

□

Satz 4.2 (Folgenkriterium für ε-δ-ungefähre Stetigkeit einer Funktion an einem Punkt)**.** *Eine Funktion $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ ist genau dann ε-δ-ungefähr stetig im Punkt $x_0 \in X$, wenn $\lim\limits_{\substack{x \rightsquigarrow x_0 \\ \leq\delta}} f(x) \approx_{\leq\varepsilon} f(x_0)$ ist.*

Beweis.

$$f \text{ ist } \varepsilon\text{-}\delta\text{-ungefähr stetig im Punkt } x_0 \in X \tag{4.15}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \approx_{\leq\delta} x_0 : f(x) \approx_{\leq\varepsilon} f(x_0) \tag{4.16}$$

$$\Big\downarrow \text{ obiger Satz 4.1}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightsquigarrow x_0 \\ \leq\delta}} f(x) \approx_{\leq\varepsilon} f(x_0) \tag{4.17}$$

□

4.2 ε-ungefähr stetige Funktionen

Wie lässt sich nun die globale Eigenschaft der Stetigkeit definieren? Betrachte dazu die globale ε-δ-Definition der Stetigkeit. Aus dieser lässt sich nämlich die Definition der ε-ungefähr stetigen Funktion finden:

$$f : (X, d_X) \to (Y, d_Y) \text{ ist stetig} \tag{4.18}$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \, \forall x \in X \, \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \, \forall y \in Y : (d_X(x,y) \leq \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) \leq \varepsilon) \tag{4.19}$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \, \underbrace{\forall x \in X \, \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : f \text{ ist } \varepsilon\text{-}\delta\text{-ungefähr stetig an der Stelle } x}_{\text{Definition für globale } \varepsilon\text{-ungefähre Stetigkeit}} \tag{4.20}$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : f \text{ ist } \varepsilon\text{-ungefähr stetig} \tag{4.21}$$

Dadurch erhalte ich folgende Definition der globalen ε-ungefähren Stetigkeit:

Definition 4.4 (ε-ungefähre Stetigkeit)**.** Eine Funktion $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ heißt *ε-ungefähr stetig* mit $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, wenn es für alle $x \in X$ ein $\delta(\varepsilon, x) \in \mathbb{R}^+$ gibt, so dass f an der Stelle x ε-$\delta(\varepsilon, x)$-ungefähr stetig ist.

Eigentlich könnte ich auch die Definition anders formulieren und sagen, dass eine Funktion $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ δ-ungefähr stetig ist, wenn es für jedes $x \in X$ ein $\varepsilon(x)$ gibt, so dass f an der Stelle x $\varepsilon(x)$-δ-ungefähr stetig ist. Diese Definition passt aber nicht so gut mit der klassischen Definition zusammen. So würde es Funktion geben, die zwar klassisch stetig, aber nicht δ-ungefähr stetig wären (wie zum Beispiel die Funktion $f :]0,1[\to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$).

Es gibt auch einen weiteren Grund für die Wahl der obigen Definition. In den meisten Anwendungsfällen ist man bestrebt den maximalen Fehler eines berechneten Werts so gering wie möglich zu halten. So könnte man einen maximalen Fehler ε vorgeben und danach fragen, wie der Fehler $\delta(x)$ im Argument x sein darf, damit auf jeden Fall der Fehler im Funktionswert kleiner als ε ist. ε-ungefähre Stetigkeit garantiert, dass es für alle Argumente x einen solchen maximalen Fehler $\delta(x)$ gibt.

Es bietet sich außerdem an, ε-ungefähre Stetigkeit in nur einem Argument zu definieren:

Definition 4.5 (ε-ungefähre Stetigkeit einer Funktion in einem Argument)**.** Eine Funktion $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ heißt *ε-ungefähr stetig im Punkt $x_0 \in X$*, wenn ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ existiert, so dass f an der Stelle x_0 ε-δ-ungefähr stetig ist.

Eine Funktion ist also genau dann ε-ungefähr stetig, wenn sie in jedem Punkt ε-ungefähr stetig ist.

4.3 ε-δ-ungefähr gleichmäßige Stetigkeit

4.3.1 Definition der ε-δ-ungefähr gleichmäßig stetigen Funktion

Wie lautet meine Variante für die gleichmäßige Stetigkeit?

Definition 4.6 (ε-δ-ungefähr gleichmäßige Stetigkeit)**.** Eine Funktion $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ heißt *ε-δ-ungefähr gleichmäßig stetig*, wenn für alle $x, y \in X$ mit $x \approx_{\leq \delta} y$ die Relation $f(x) \approx_{\leq \varepsilon} f(y)$ erfüllt ist.

Auch diese Definition ist direkt der klassischen Definition entnommen:

$$f : (X, d_X) \to (Y, d_Y) \text{ gleichmäßig stetig} \tag{4.22}$$
$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \, \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \, \forall x, y \in X : d_X(x,y) \leq \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) \leq \delta \tag{4.23}$$
$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \, \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : f \text{ ist } \varepsilon\text{-}\delta\text{-ungefähr gleichmäßig stetig} \tag{4.24}$$

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist also genau dann ε-δ-ungefähr gleichmäßig stetig, wenn du um jeden Punkt $(x, f(x))$ so ein Rechteck mit den Seitenlängen 2ε und 2δ anlegen kannst, dass keine Funktionswerte oberhalb oder unterhalb dieses Dreiecks liegen[3]:

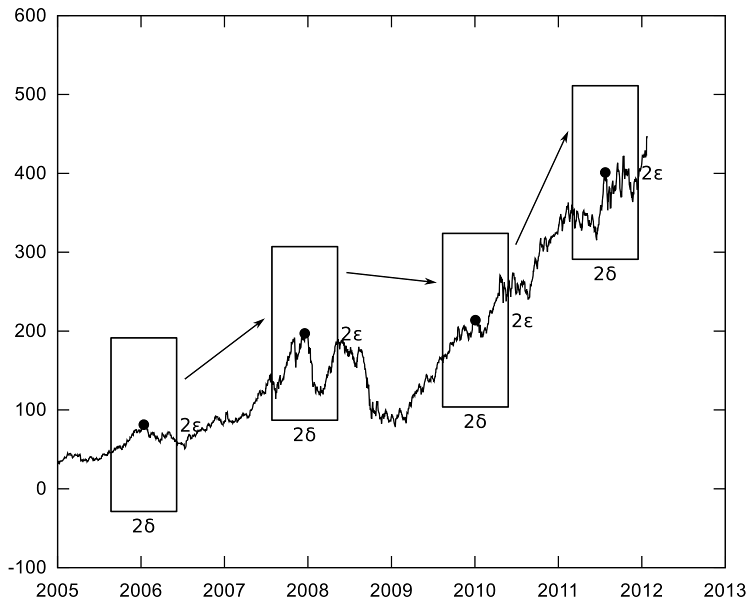

Abbildung 4.2: ε-δ-ungefähr gleichmäßig stetige Funktion f mit eingezeichneten Rechtecken der Seitenlängen 2ε und 2δ

4.3.2 Satz über ε-ungefähr stetige Funktionen auf kompakten Definitionsmengen

In der klassischen Analysis sind alle auf kompakten Mengen definierten stetigen Funktionen gleichmäßig stetig. Dieser Satz ist wichtig, sichert er in der reellen Analysis doch die Integrierbarkeit stetiger Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen. Dementsprechend bin ich daran interessiert, dass es auch einen entsprechenden Satz in dieser Analysis gibt. Eine erste Vermutung ist die, dass jede ε-ungefähr stetige Funktion auf einer kompakten

[3] Dargestellt ist im Übrigen der Börsenverlauf von Apple im Zeitraum vom 03.01.2005 bis zum 27.01.2012 (Quelle: `http://www.ariva.de/apple-aktie/historische_kurse?boerse_id=40`, abgerufen am 29.01.2012)

Definitionsmenge ε-δ-ungefähr gleichmäßig stetig für mindestens ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ ist. Folgendes Beispiel zeigt aber, dass dieser Satz nicht gelten kann:

Beispiel 4.1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} -1 & ; x < 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ 1 & ; x > 0 \end{cases} \tag{4.25}$$

Diese Funktion ist 1-ungefähr stetig. Wähle hierzu für $x \neq 0$ als $\delta(x)$ die Zahl $\delta(x) := \frac{|x|}{2}$. Auf dem Intervall $[x - \delta(x), x + \delta(x)]$ ist die Funktion konstant und damit die Unterschiede im Funktionswert kleiner als 1. Für $\delta(x = 0)$ kann jede beliebige positive reelle Zahl gewählt werden, da der Abstand eines beliebigen Funktionswertes von $f(0) = 0$ stets kleiner gleich 1 ist.

Jedoch ist diese Funktion für alle $\delta \in \mathbb{R}^+$ nicht 1-δ-ungefähr gleichmäßig stetig, da der Abstand zwischen $f\left(\frac{\delta}{2}\right)$ und $f\left(-\frac{\delta}{2}\right)$ gleich 2 und damit größer als 1 ist, obwohl der Abstand der Argumente $\frac{\delta}{2}$ und $-\frac{\delta}{2}$ kleiner gleich δ ist. Aus ε-ungefährer Stetigkeit kann also für Funktionen auf kompakten Definitionsmengen keine ε-δ-ungefähre gleichmäßige Stetigkeit folgen.

Da der Abstand zweier Funktionswerte von f kleiner gleich 2 ist, ist die Funktion aber zu jedem $\delta \in \mathbb{R}^+$ 2-δ-ungefähr gleichmäßig stetig.

Dass obiges Beispiel unsere Situation perfekt beschreibt, zeigt folgender Satz:

Satz 4.3 (Satz über ε-ungefähr stetige Funktionen auf kompakten Definitionsmengen)**.** *Sei $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ eine ε-ungefähr stetige Funktion auf einer kompakten Definitionsmenge X. Es gibt dann ein $\delta \in \mathbb{R}^+$, so dass f 2ε-δ-ungefähr gleichmäßig stetig ist.*

Lösungsweg. Ich werde den Satz analog dazu beweisen, wie seine klassische Variante bewiesen wird. Die klassische Variante geht davon aus, dass die gegebene Funktion nicht gleichmäßig stetig ist. Es werden dann zwei Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Argumenten konstruiert, so dass $d_X(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ und $d_Y(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0$ für ein $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}^+$ ist. Mit Hilfe der Kompaktheit der Definitionsmenge wird daraufhin ein Widerspruch zur angenommenen Stetigkeit von f hergeleitet[13, Seite 108, Satz 4].

Beweis. Beweis durch Kontraposition:

$$\forall \delta \in \mathbb{R}^+ : \neg \left(f \text{ ist } 2\varepsilon\text{-}\delta\text{-ungefähr gleichmäßig stetig}\right) \tag{4.26}$$

$$\Rightarrow \forall \delta \in \mathbb{R}^+ \, \exists x, y \in X : (x \approx_{\leq \delta} y \wedge f(x) \not\approx_{\leq 2\varepsilon} f(y)) \tag{4.27}$$

$$\downarrow \text{ Wähle für } \delta \text{ die Werte der Folge } \left(\tfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$\Rightarrow \underset{\text{def}}{\exists} (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \, \forall n \in \mathbb{N} : \left(x_n \approx_{\leq \frac{1}{n}} y_n \wedge f(x_n) \not\approx_{\leq 2\varepsilon} f(y_n)\right) \tag{4.28}$$

$$\big\downarrow \; X \text{ ist kompakt}$$

$$\Rightarrow \underset{\text{def}}{\exists} x_0 \in X : x_0 \text{ ist klassischer Häufungspunkt von } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ und } (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \tag{4.29}$$

$$\Bigg\downarrow \; \begin{array}{l}\text{Häufungspunkte können als Grenzwerte von Teilfolgen}\\ \text{dargestellt werden}\end{array}$$

$$\Rightarrow \underset{\text{def}}{\exists} (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}, (y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} : \Big(\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \wedge \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = x_0\Big) \tag{4.30}$$

Behauptung: f ist an der Stelle x_0 nicht ε-ungefähr stetig.

Sei $\delta \in \mathbb{R}^+$ beliebig. Es ist

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \ddot{\forall} k \in \mathbb{N} : \big(x_{n_k} \approx_{\leq\delta} x_0 \wedge y_{n_k} \approx_{\leq\delta} x_0\big) \\ \wedge & \,\forall k \in \mathbb{N} : \big(\quad 2\varepsilon < d_Y(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \\ & \qquad\qquad \Rightarrow 2\varepsilon < d_Y(f(x_{n_k}), f(x_0)) + d_Y(f(y_{n_k}), f(x_0))\big) \end{aligned} \tag{4.31}$$

$$\Bigg\downarrow \; \begin{array}{rrl} & 2\varepsilon & < d_Y(f(x_{n_k}), f(x_0)) + d_Y(f(y_{n_k}), f(x_0)) \\ \Rightarrow & \varepsilon & < d_Y(f(x_{n_k}), f(x_0)) \vee \varepsilon < d_Y(f(y_{n_k}), f(x_0)) \end{array}$$

$$\Rightarrow \Big(\dot{\forall} k \in \mathbb{N} : \varepsilon < d_Y(f(x_{n_k}), f(x_0))\Big) \vee \Big(\dot{\forall} k \in \mathbb{N} : \varepsilon < d_Y(f(y_{n_k}), f(x_0))\Big) \tag{4.32}$$

$$\Rightarrow \Big(\dot{\forall} k \in \mathbb{N} : f(x_{n_k}) \not\approx_{\leq\varepsilon} f(x_0)\Big) \vee \Big(\dot{\forall} k \in \mathbb{N} : f(y_{n_k}) \not\approx_{\leq\varepsilon} f(x_0)\Big) \tag{4.33}$$

$$\big\downarrow \; \ddot{\forall} k \in \mathbb{N} : \big(x_{n_k} \approx_{\leq\delta} x_0 \wedge y_{n_k} \approx_{\leq\delta} x_0\big)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \Big(\lim_{k\to\infty} x_{n_k} \approx_{\leq\delta} x_0 \wedge \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \not\approx_{\leq\varepsilon} f(x_0)\Big) \\ \vee & \Big(\lim_{k\to\infty} y_{n_k} \approx_{\leq\delta} x_0 \wedge \lim_{k\to\infty} y_{n_k} \not\approx_{\leq\varepsilon} f(x_0)\Big) \end{aligned} \tag{4.34}$$

$$\Rightarrow f \text{ ist an der Stelle } x_0 \text{ nicht } \varepsilon\text{-}\delta\text{-ungefähr stetig.} \tag{4.35}$$

Obiges Ergebnis steht jedoch im Widerspruch zur Annahme, dass f ε-ungefähr stetig ist, denn dann gäbe es mindestens ein $\delta \in \mathbb{R}^+$, so dass f an der Stelle x_0 ε-δ-ungefähr stetig ist. $\square$

Kapitel 5

Differentiation

5.1 Definition der ε-δ-ungefähren Ableitung

Bemerkung. Sei im Folgenden $\mathbb{K}$ entweder die Menge komplexer Zahlen $\mathbb{C}$ oder die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Sei D eine beliebige Teilmenge aus $\mathbb{K}$, in der jeder Punkt Häufungspunkt dieser Menge ist.

Wie lässt sich eine Ableitung in dieser Analysis definieren? Da das Ziel dieses Kapitels die erste Erkundung einer Analysis mit Infinitesimalrelation ist, beschränke ich mich nur auf den Ableitungstypen, der klassisch über den Differentialquotienten in $\mathbb{R}$ oder in $\mathbb{C}$ definiert ist (ich betrachte also keine Richtungsableitungen oder totale Ableitungen vektorieller Funktionen). Eine Antwort liefert die Übersetzung des klassischen Differentialquotienten $\lim\limits_{h\to 0,\, h\neq 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ in unsere Analysis:

Definition 5.1 (ε-δ-ungefähre Ableitung)**.** Sei $f : D \to \mathbb{K}$ eine reell- oder komplexwertige Funktion. Eine Zahl $c \in \mathbb{K}$ heißt *ε-δ-ungefähre Ableitung an der Stelle* $x_0 \in D$, wenn $\lim\limits_{h \underset{\leq\delta}{\rightsquigarrow} 0,\, h\neq 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \approx_{\leq\varepsilon} c$ ist.

Ich führe wieder eine neue Schreibweise für die obige Definition ein, die stark mit der abkürzenden Notation des Ester-Quantors 4.2 verwandt ist:

Definition 5.2 (spezieller Ester-Quantor)**.** Eine Aussage $\forall y \overset{!}{\approx}_{\leq\delta} x_0 : A(y)$ für ein $x_0 \in X$ ist genau dann wahr, wenn für alle $y \in X$ aus dem metrischen Grundraum (X, d) mit $y \approx_{\leq\delta} x_0$ und $y \neq x_0$ die Aussage $A(y)$ erfüllt ist. Es ist:

$$\forall y \overset{!}{\approx}_{\leq\delta} x_0 : A(y) :\Leftrightarrow \forall y \in X : (y \approx_{\leq\delta} x_0 \wedge y \neq 0 \Rightarrow A(y)) \tag{5.1}$$

Bemerkung. Nach dem Charakterisierungssatz der ε-δ-ungefähren Funktionskonvergenz (Satz 4.1) ist c genau dann eine ε-δ-ungefähre Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0 wenn $\forall h \overset{!}{\approx}_{\leq\delta} 0 : \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \approx_{\leq\varepsilon} c$ ist.

Definition 5.3 (ε-δ-ungefähre Differenzierbarkeit)**.** Eine Funktion $f : D \to \mathbb{K}$ heißt *ε-δ-ungefähr differenzierbar an der Stelle $x_0 \in D$*, wenn sie mindestens eine ε-δ-ungefähre Ableitung an dieser Stelle besitzt.

In der klassischen Analysis ist eine Funktion $f : D \to \mathbb{K}$ an der Stelle x_0 genau dann differenzierbar, wenn $f(x_0 + h) = f(x_0) + c \cdot h + \phi(h)$ mit $c \in \mathbb{K}$ und $\lim\limits_{h \to 0,\, h \neq 0} \frac{\phi(h)}{h} = 0$ ist[13, Seite 152, Satz 1]. Auch in dieser Analysis habe ich eine ähnliche Charakterisierung gefunden:

Satz 5.1 (Approximierbarkeit ε-δ-ungefähr differenzierbarer Funktionen)**.** *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{K}$ besitzt genau dann an der Stelle $x_0 \in D$ die ε-δ-ungefähre Ableitung $c \in \mathbb{K}$, wenn $\forall h \approx_{\leq \delta} 0 : f(x_0 + h) \approx_{\leq \varepsilon \cdot |h|} f(x_0) + c \cdot h$ erfüllt ist.*

Beweis. Es ist c genau dann eine ε-δ-ungefähre Ableitung von f an der Stelle x_0, wenn $\forall h \overset{!}{\approx}_{\leq \delta} 0 : \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \approx_{\leq \varepsilon} c$ ist. Formen wir $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \approx_{\leq \varepsilon} c$ um:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \approx_{\leq \varepsilon} c \tag{5.2}$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - c \right| \leq \varepsilon \tag{5.3}$$

$$\downarrow\ h \neq 0 \tag{5.4}$$

$$\Leftrightarrow |f(x_0 + h) - f(x_0) - c \cdot h| \leq \varepsilon \cdot |h| \tag{5.5}$$

$$\Leftrightarrow f(x_0 + h) \approx_{\leq \varepsilon \cdot |h|} f(x_0) + c \cdot h \tag{5.6}$$

Also ist

$$c \text{ ist } \varepsilon\text{-}\delta\text{-ungefähre Ableitung von } f \text{ an der Stelle } x_0 \tag{5.7}$$

$$\Leftrightarrow \forall h \overset{!}{\approx}_{\leq \delta} 0 : \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \approx_{\leq \varepsilon} c \tag{5.8}$$

$$\downarrow \text{ obige Äquivalenzumformung}$$

$$\Leftrightarrow \forall h \overset{!}{\approx}_{\leq \delta} 0 : f(x_0 + h) \approx_{\leq \varepsilon \cdot |h|} f(x_0) + c \cdot h \tag{5.9}$$

$$\downarrow\ f(x_0 + h) \approx_{\leq \varepsilon \cdot |h|} f(x_0) + c \cdot h \text{ auch für } h = 0 \text{ erfüllt}$$

$$\Leftrightarrow \forall h \approx_{\leq \delta} 0 : f(x_0 + h) \approx_{\leq \varepsilon \cdot |h|} f(x_0) + c \cdot h \tag{5.10}$$

□

5.2 Eigenschaften ε-δ-ungefähr differenzierbarer Funktionen

Schon anhand der Definition der ε-δ-ungefähren Ableitung erkennt man, dass diese 2ε-ungefähr genau bestimmt ist. Dies folgt aus dem Satz 3.2 zur 2ε-ungefähren Bestimmung des ε-ungefähren Grenzwerts. Ich will gerne diesen Satz alternativ mit der Approximierbarkeitseigenschaft ε-δ-ungefähr differenzierbarer Funktionen beweisen:

Satz 5.2 (2ε-ungefähre Bestimmung der ε-δ-ungefähren Ableitung). *Zwei ε-δ-ungefähre Ableitungen einer Funktion $f : D \to \mathbb{K}$ sind 2ε-ungefähr gleich.*

Beweis.

$$\forall h \overset{!}{\approx}_{\leq\delta} 0 : \Big(f(x_0+h) \approx_{\leq \varepsilon\cdot|h|} f(x_0) + c_1 \cdot h \wedge f(x_0+h) \approx_{\leq \varepsilon\cdot|h|} f(x_0) + c_2 \cdot h \Big) \quad (5.11)$$

$\downarrow$ schwache Transitivitätseigenschaft (Satz 2.1)

$$\Rightarrow \forall h \overset{!}{\approx}_{\leq\delta} 0 : f(x_0) + c_1 \cdot h \approx_{\leq 2\varepsilon\cdot|h|} f(x_0) + c_2 \cdot h \quad (5.12)$$

$$\Rightarrow \forall h \overset{!}{\approx}_{\leq\delta} 0 : c_1 \cdot h \approx_{\leq 2\varepsilon\cdot|h|} c_2 \cdot h \quad (5.13)$$

$$\Rightarrow \forall h \overset{!}{\approx}_{\leq\delta} 0 : |c_1 \cdot h - c_2 \cdot h| \leq 2\varepsilon \cdot |h| \quad (5.14)$$

$$\Rightarrow \forall h \overset{!}{\approx}_{\leq\delta} 0 : |c_1 - c_2| \leq 2\varepsilon \quad (5.15)$$

$$\Rightarrow \forall h \overset{!}{\approx}_{\leq\delta} 0 : c_1 \approx_{\leq 2\varepsilon} c_2 \quad (5.16)$$

$$\Rightarrow c_1 \approx_{\leq 2\varepsilon} c_2 \quad (5.17)$$

□

Auch eine Form der Stetigkeit lässt sich aus dem Approximierbarkeitssatz beweisen:

Satz 5.3 (Stetigkeitssatz ε-δ-ungefähr differenzierbarer Funktionen). *Sei $f : D \to \mathbb{K}$ eine ε-δ-ungefähr differenzierbare Funktion an der Stelle $x_0 \in D$ mit der ε-δ-ungefähren Ableitung $c \in \mathbb{K}$. f ist an der Stelle x_0 dann $((\varepsilon + |c|)\delta)$-$\delta$-ungefähr stetig.*

Beweis.

$$\forall h \approx_{\leq\delta} 0 : f(x+h) \approx_{\leq \varepsilon\cdot|h|} f(x) + ch \quad (5.18)$$

$\downarrow$ Additionsregeln der Abstandsrelation (Satz 2.3)

$$\Rightarrow \forall h \approx_{\leq\delta} 0 : f(x+h) \approx_{\leq \varepsilon\cdot|h|+|ch|} f(x) \quad (5.19)$$

$$\Rightarrow \forall h \approx_{\leq\delta} 0 : f(x+h) \approx_{\leq (\varepsilon+|c|)\cdot|h|} f(x) \quad (5.20)$$

$$\downarrow \ |h| \leq \delta \text{ und Monotoniesatz 2.2}$$

$$\Rightarrow \forall h \approx_{\leq \delta} 0 : f(x+h) \approx_{\leq (\varepsilon+|c|)\cdot\delta} f(x) \tag{5.21}$$

$$\Rightarrow \forall y \approx_{\leq \delta} x : f(y) \approx_{\leq (\varepsilon+|c|)\cdot\delta} f(x) \tag{5.22}$$

□

Kapitel 6

Integration

6.1 Definition des bestimmten Integrals

Wie soll das bestimmte Integral definiert werden? Klassisch wird es als der orientierte Flächeninhalt unter dem Graphen einer Funktion beschrieben. So definiert es beispielsweise Herr Dr. Ralf Gerkmann in seinem Skript zur Maßtheorie[16, Seite 25]. Auch die klassische Definitionen des Riemannintegrals [6][13, Seite 188] beziehungsweise des Lebesgue-Integrals [4][11, Seite 129] zielen darauf ab, das bestimmte Integral als Ergebnis eines Grenzwertprozesses so zu definieren, dass es dem orientierten Flächeninhalt unter dem Graphen entspricht.

Ich habe in dieser Analysis jedoch einen Vorteil: Ich kann nämlich ausdrücken, wann zwei Werte ungefähr gleich sind. Anstatt also den exakten Wert des orientierten Flächeninhalts beschreiben zu wollen, kann das bestimmte Integral auch so definiert werden, dass es ungefähr diesem Flächeninhalt entspricht. Doch wie sollte dies geschehen?

Erinnere dich an die Definition des Riemannschen Integrals als Grenzwert von Flächeninhalten unter Treppenfunktionen. Wieso also nicht den Grenzwertprozess weglassen und das bestimmte Integral einer Funktion als den Flächeninhalt unter einer zur Funktion geschickt approximierten Treppenfunktion definieren?

Diese Definition hat nämlich einen Vorteil: Dadurch, dass ich mir den Grenzwertprozess spare, reduziere ich das bestimmte Integral auf eine endliche Summe von Rechtecksflächen. Es ist dann nicht nur die Definition einfacher, auch ihre Anwendung sollte einfacher sein. Ich muss nur dafür sorgen, dass die Stützstellen der Treppenfunktion so gewählt werden, dass der Fehler zum exakten Wert des orientierten Flächeninhalts vernachlässigt werden kann (kleiner als ein vorgegebenes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ist).

So sah im Übrigen auch Leibniz das bestimmte Integral. Für ihn waren Kurven Polygonzüge mit infinitesimal kleinen Abständen zwischen zwei Eckpunkten. Das bestimmte Integral definierte er nun als den Flächeninhalt der Treppenfunktion unter diesem Polygonzug. Die dadurch nicht mitberechneten Flächen der Dreiecke betrachtete Leibniz als vernachlässigbar klein [18, Seite 147]:

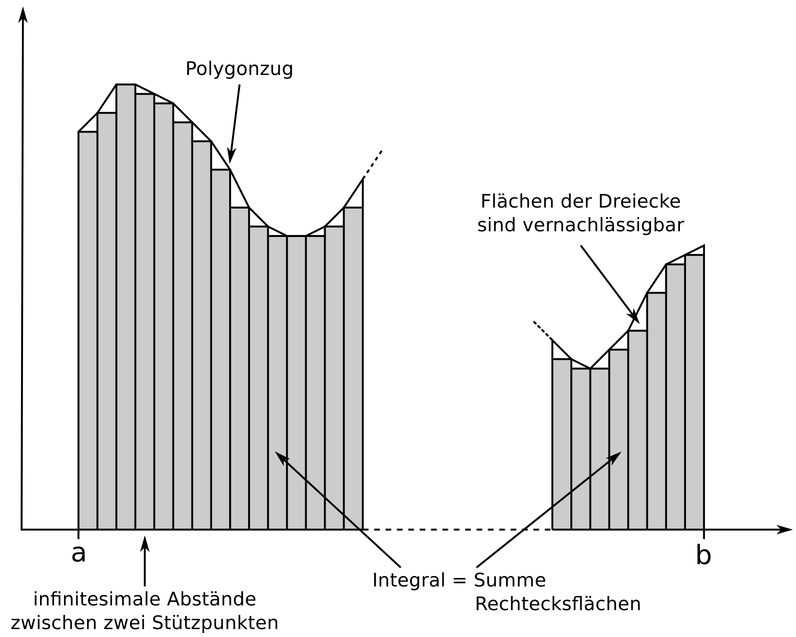

Abbildung 6.1: Leibniz Auffassung eines Integrals

Ursprünglich war also auch für Leibniz das bestimmte Integral nur bis auf einen vernachlässigbaren Fehler genau definiert. Wesentlicher Unterschied seiner Definition zu meiner Definitionsidee ist der, dass seine Summe von Rechtecksflächen unendlich viele Summanden besaß, meine jedoch endlich sein wird.

6.1.1 Welche Funktionen sollen integrierbar sein?

Sowohl beim Riemannschen Integral als auch beim Lebesgue-Integral werden zwischen integrierbaren und nicht integrierbaren Funktionen unterschieden. Die Vermutung liegt nahe, dass auch ich eine Unterscheidung vornehmen muss.

Jedoch habe ich noch keine gute Antwort auf die obige Fragestellung gefunden. Erste Überlegungen bringen mich auf die Vermutung, dass ε-δ-ungefähr gleichmäßig stetige Funktionen auf jeden Fall integrierbar sein sollten.

Um ehrlich zu sein, will ich mich momentan aber weniger mit dieser Fragestellung beschäftigen, als vielmehr die resultierende Theorie meiner Definitionsidee erkunden. Deswegen will ich erst einmal das bestimmte Integral nur für ε-δ-ungefähr gleichmäßig stetige Funktionen definieren. Mein Bauchgefühl sagt mir zwar, dass diese Einschränkung zu stark ist, jedoch kann später immer noch untersucht werden, wie der Intergalbegriff verbessert werden kann. Für Anregungen bin ich dankbar ☺.

Beachte, dass die Einschränkung der Definition auf eine bestimmte Funktionenklasse in der Mathematik nicht neu ist. So sind in der Definition des Lebesgue-Integrals nur messbare Funktionen Kandidaten integrierbarer Funktionen[4][11, Seite 129].

Bemerkung. Der klassische Fundamentalsatz ist nur für stetige Integranden formuliert[2][13, Seite 201, Satz 3]. Dies könnte darauf hinweisen, dass ich mit meiner Festlegung, nur ε-δ-ungefähr gleichmäßig stetige Funktionen als integrierbare Funktionen anzusehen, gar nicht so falsch liege.

6.1.2 Die Wahl der Stützstellen für die Treppenfunktion

Zur Angabe einer Treppenfunktion, die eine gegebene Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ approximieren soll, wird in der Regel eine Menge von Stützstellen x_0 bis x_n mit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ definiert. Die Treppenfunktionen ist dann in den offenen Intervallen $]x_{k-1}, x_k[$ für $k \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ konstant mit dem Wert $f(\tilde{x}_k)$, wobei $\tilde{x}_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ist. Das Paar $\left((x_k)_{k=0}^{k=n}, (\tilde{x}_k)_{k=1}^{k=n}\right)$ der Stützstellen x_0 bis x_n und der Zwischenstellen $\tilde{x}_1$ bis $\tilde{x}_n$ wird Riemann-Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ genannt[5][13, Seite 194]. Die Feinheit einer Riemann-Zerlegung ist der maximale Abstand $\max\{|x_{k-1} - x_k| : k \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}\}$ zwischen zwei Stützstellen[5][13, Seite 195].

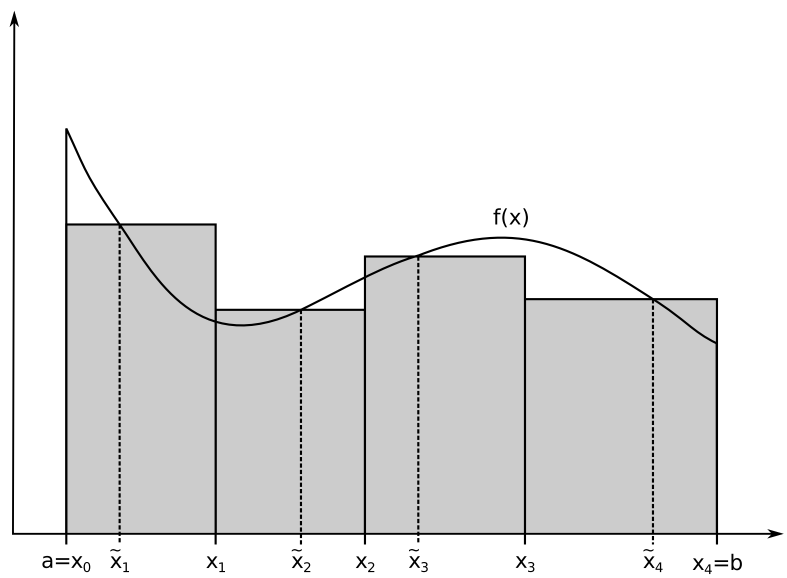

Abbildung 6.2: Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit eingezeichneten Stützstellen x_0 bis x_4 und Zwischenstellen $\tilde{x}_1$ bis $\tilde{x}_4$

Rufe dir in Erinnerung, dass ich das bestimmte Integral für ε-δ-ungefähr gleichmäßig stetige Funktionen definieren will. Diese Stetigkeitseigenschaft werde ich in Beweisen vor allem dazu verwenden, den Abstand des Funktionswerts $f(x)$ zum Wert $\mathcal{T}(x) = f(\tilde{x}_k)$ der approximierten Treppenfunktion $\mathcal{T}$ an der Stelle x abzuschätzen (wobei $x \in [x_{k-1}, x_k]$ ist). Um diese Abschätzung durchführen zu können, muss $\tilde{x}_k \approx_{\leq \delta} x$ also $|\tilde{x}_k - x| \leq \delta$ sein. Dies ist genau dann der Fall, wenn der maximale Abstand der Zwischenstellen zu den benachbarten Stützstellen kleiner gleich δ ist. Deswegen werde ich auch die Feinheit der

Riemann-Zerlegung anders als normalerweise definieren – und zwar als maximalen Abstand $\max(\{|\tilde{x}_k - x_{k-1}| : k \in \{1,2,3,\ldots,n\}\} \cup \{|x_k - \tilde{x}_k| : k \in \{1,2,3,\ldots,n\}\})$ der Zwischenstellen zu den benachbarten Stützstellen. Die so erhaltene Definition der Feinheit ist schwächer und mehr Riemann-Zerlegungen sind feiner als eine vorgegebene obere Schranke als bei der klassischen Definition.

Ich bin der Meinung, dass die konkrete Definition des bestimmten Integrals von der aktuellen Wahl der Riemann-Zerlegung befreit werden sollte. Zwar könnte ich eine konkrete Riemann-Zerlegung vorgeben, dies schränkt die Definition aber unnötig ein. Besser ist es nur zu fordern, dass die Riemann-Zerlegung eine Feinheit kleiner gleich δ besitzen soll, wenn die untersuchte Funktion ε-δ-ungefähr gleichmäßig stetig ist.

Ich fasse das bisher geschriebene in Definitionen zusammen:

Definition 6.1 (Riemann-Zerlegung)**.** Sei $[a,b]$ ein abgeschlossenes Intervall reeller Zahlen. Eine *Zerlegung* $\left((x_k)_{k=0}^{k=n}, (\tilde{x}_k)_{k=1}^{k=n}\right)$ ist eine Menge von Stützstellen x_0 bis x_n mit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ und Zwischenstellen $\tilde{x}_1$ bis $\tilde{x}_n$ mit $\tilde{x}_k \in [x_{k-1}, x_k]$ für alle $k \in \{1,2,3,\ldots,n\}$.

Definition 6.2 (Feinheit einer Riemann-Zerlegung)**.** Die *Feinheit* der Riemann-Zerlegung $\left((x_k)_{k=0}^{k=n}, (\tilde{x}_k)_{k=1}^{k=n}\right)$ ist der maximale Abstand $\max(\{|\tilde{x}_k - x_{k-1}| : k \in \{1,2,3,\ldots,n\}\} \cup \{|x_k - \tilde{x}_k| : k \in \{1,2,3,\ldots,n\}\})$ der Zwischenstellen zu den benachbarten Stützstellen.

Definition 6.3 (Zerlegungsfunktion)**.** Die *Zerlegungsfunktion* $\mathcal{Z}_{\leq\delta}$ für $\delta \in \mathbb{R}^+$ ist eine Funktion, die jedem Intervall $[a,b]$ eine Riemann-Zerlegung mit einer Feinheit kleiner gleich δ zuordnet. Dabei ist $\mathcal{Z}_{\leq\delta}([a,b]) := \{(\tilde{x}_k, \delta_k = x_k - x_{k-1}) : k \in \{1,2,\ldots,n\}\}$, wobei x_{k-1} und x_k die Stützstellen des k-ten Intervalls und $\tilde{x}_k$ die k-te Zwischenstelle der zugeordneten Riemann-Zerlegung ist. $\mathcal{Z}_{\leq\delta}([a,b])$ ist also die Menge der Zahlenpaare $(\tilde{x}_k, \delta_k)$, wobei $\tilde{x}_k$ die k-te Zwischenstelle und δ_k die Länge $x_k - x_{k-1}$ des k-ten Intervalls $[x_{k-1}, x_k]$ ist.

Dadurch, dass ich in der Definition der Zerlegungsfunktion die Zuordnung der Riemann-Zerlegung zum Intervall $[a,b]$ nicht explizit angebe, befreie ich die kommenden Definitionen von einer konkreten Wahl der Riemann-Zerlegung. Ich erhalte durch sie zwar eine Zerlegung mit der gewünschten Eigenschaft, dass ihre Feinheit kleiner gleich δ ist, wie sie jedoch konkret aussieht, weiß ich nicht. In der Anwendung müssen Autoren selbst definieren, wie sie ihre Zerlegungsfunktion definieren.

6.1.3 Definition des ε-δ-ungefähr bestimmten Integrals

Ich habe nun alle Hilfsmittel, um das ε-δ-ungefähr bestimmte Integral einer ε-δ-ungefähr gleichmäßig stetigen Funktion zu definieren:

Definition 6.4 (ε-δ-ungefähr bestimmtes Integral)**.** Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine ε-δ-ungefähr gleichmäßig stetige Funktion. Das *ε-δ-ungefähr bestimmte Integral* dieser Funktion f ist die endliche Summe $\displaystyle\sum_{(\tilde{x}_k,\delta_k)\in\mathcal{Z}_{\leq\delta}([a,b])} f(\tilde{x}_k) \cdot \delta_k$.

Bemerkung. Um eine kürzere Notation zu haben, schreibe ich im Folgenden $\sum\limits_{\mathcal{Z}_{\leq\delta}([a,b])}$ anstatt $\sum\limits_{(\tilde{x}_k,\delta_k)\in\mathcal{Z}_{\leq\delta}([a,b])}$. Beachte, dass in der verkürzten Notation immer implizit über $(\tilde{x}_k,\delta_k)\in\mathcal{Z}_{\leq\delta}([a,b])$ summiert wird.

Definition 6.5 (ε-δ-ungefähr integrierbare Funktion)**.** Eine Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ heißt *ε-δ-ungefähr integrierbar*, wenn das ε-δ-ungefähr bestimmte Integral dieser Funktion existiert, wenn also die Funktion ε-δ-ungefähr gleichmäßig stetig ist.

Definition 6.6 (ε-ungefähr integrierbare Funktion)**.** Eine Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ heißt *ε-ungefähr integrierbar*, wenn es ein $\delta\in\mathbb{R}^+$ gibt, so dass diese Funktion ε-δ-ungefähr integrierbar ist.

Bemerkung. Nach dem Satz über ε-ungefähr stetige Funktionen über kompakten Definitionsmengen (Satz 4.3) gibt es für alle ε-ungefähr stetigen Funktionen auf dem abgeschlossen Intervall $[a,b]$ ein $\delta\in\mathbb{R}^+$, so dass diese Funktion 2ε-δ-ungefähr gleichmäßig stetig ist. Jede ε-ungefähr stetige Funktion auf $[a,b]$ ist also 2ε-ungefähr integrierbar.

6.1.4 Klassisch integrierbare Funktionen

In der aktuellen Theorie gibt es zwei Integraldefinitionen, die eine wichtige Rolle spielen: Das Riemannsche Integral und das Lebesgue-Integral. Deswegen bezeichne ich im Folgenden Funktionen f als *klassisch integrierbar*, wenn sie entweder Riemman- oder Lebesgue-integrierbar sind. Mit $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ bezeichne ich das dementsprechende Riemann- oder Lebesgue-Integral (je nachdem für welches Integral du dich gerade interessierst), wobei ich es einfach *klassisches Integral* nennen werde. Ich werde nur Eigenschaften verwenden, die beiden Integraldefinitionen gemeinsam sind.

6.2 Eigenschaften des ε-δ-ungefähr bestimmten Integrals

Meine Idee war es, das bestimmte Integral so zu definieren, dass es ungefähr dem Flächeninhalt unter dem Graphen der Funktion entspricht. Ist dies aber wirklich der Fall? Ja, wie folgender Satz zeigt:

Satz 6.1 (ε-ungefährer Bestimmungssatz des ε-δ-ungefähr bestimmten Integrals)**.** *Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine ε-δ-ungefähr integrierbare Funktion, die gleichzeitig klassisch integrierbar ist. Das ε-δ-ungefähr bestimmte Integral $\sum\limits_{\mathcal{Z}_{\leq\delta}([a,b])} f(\tilde{x}_k)\cdot\delta_k$ und das klassische Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ sind dann $\varepsilon(b-a)$-ungefähr gleich.*

Beweis. Sei $(x_{k-1}, x_k, \tilde{x}_k) \in \mathcal{Z}_{\leq\delta}([a,b])$ beliebig. Vergleiche nun die Flächen des Graphens unter der Funktion f im Intervall $[x_{k-1}, x_k]$ mit der Rechtecksfläche unter der Treppenfunktion $\mathcal{T}$ im Intervall $[x_{k-1}, x_k]$. Dabei ist in diesem Intervall $\mathcal{T}(x) := f(\tilde{x}_k)$. Da die Feinheit der durch $\mathcal{Z}_{\leq\delta}$ erhaltenen Riemann-Zerlegung kleiner gleich δ ist, ist $x \approx_{\leq\delta} \tilde{x}_k$ für alle $x \in [x_{k-1}, x_k]$. Nach der Definition der ε-δ-ungefähr gleichmäßig stetigen Funktion ist dann $f(x) \approx_{\leq\varepsilon} f(\tilde{x}_k)$ und somit $f(\tilde{x}_k) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(\tilde{x}_k) + \varepsilon$ für alle $x \in [x_{k-1}, x_k]$. Es folgt

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(\tilde{x}_k) - \varepsilon)\,\mathrm{d}x \leq \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(\tilde{x}_k) + \varepsilon)\,\mathrm{d}x \tag{6.1}$$

$$\Rightarrow (f(\tilde{x}_k) - \varepsilon) \cdot \underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{=\delta_k} \leq \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,\mathrm{d}x \leq (f(\tilde{x}_k) + \varepsilon) \cdot \underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{=\delta_k} \tag{6.2}$$

$$\Rightarrow\ -\varepsilon \cdot \delta_k \leq \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,\mathrm{d}x - f(\tilde{x}_k) \cdot \delta_k \leq \varepsilon \cdot \delta_k \tag{6.3}$$

Wenn du nun über alle $(\tilde{x}_k, \delta_k) \in \mathcal{Z}_{\leq\delta}([a,b])$ summierst, dann erhältst du:

$$\sum_{\mathcal{Z}_{\leq\delta}([a,b])} -\varepsilon \cdot \delta_k \leq \sum_{\mathcal{Z}_{\leq\delta}([a,b])} \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) - f(\tilde{x}_k) \cdot \delta_k \right) \leq \sum_{\mathcal{Z}_{\leq\delta}([a,b])} \varepsilon \cdot \delta_k \tag{6.4}$$

$$\Rightarrow\ -\varepsilon \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{\mathcal{Z}_{\leq\delta}([a,b])} f(\tilde{x}_k) \cdot \delta_k \leq \varepsilon \cdot (b-a) \tag{6.5}$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{\mathcal{Z}_{\leq\delta}([a,b])} f(\tilde{x}_k) \cdot \delta_k \right| \leq \varepsilon \cdot (b-a) \tag{6.6}$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx_{\leq\varepsilon\cdot(b-a)} \sum_{\mathcal{Z}_{\leq\delta}([a,b])} f(\tilde{x}_k) \cdot \delta_k \tag{6.7}$$

□

Da in dieser Theorie das bestimmte Integral nichts anderes als eine endliche Summe ist, übertragen sich alle Eigenschaften endlicher Summen auch auf obige Integraldefinition. So auch die Monotonie und die Linearität:

Satz 6.2 (Monotonie und Linearität)**.** *Es ist für alle Funktionen $f, g : [a,b] \Rightarrow \mathbb{R}$ und alle Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}$:*

(a) $\displaystyle\sum_{\mathcal{Z}_{\leq\delta}([a,b])} (f+g)(\tilde{x}_k) \cdot \delta_k = \sum_{\mathcal{Z}_{\leq\delta}([a,b])} f(\tilde{x}_k) \cdot \delta_k + \sum_{\mathcal{Z}_{\leq\delta}([a,b])} g(\tilde{x}_k) \cdot \delta_k$

(b) $\sum\limits_{\mathcal{Z}_{\leq\delta}([a,b])} (\lambda \cdot f)(\tilde{x}_k) \cdot \delta_k = \lambda \cdot \sum\limits_{\mathcal{Z}_{\leq\delta}([a,b])} f(\tilde{x}_k) \cdot \delta_k$

(c) $f \leq g \Rightarrow \sum\limits_{\mathcal{Z}_{\leq\delta}([a,b])} f(\tilde{x}_k) \cdot \delta_k \leq \sum\limits_{\mathcal{Z}_{\leq\delta}([a,b])} g(\tilde{x}_k) \cdot \delta_k$

Beweis. (a) Es ist

$$\sum_{\mathcal{Z}_{\leq\delta}([a,b])} (f+g)(\tilde{x}_k) \cdot \delta_k = \sum_{\mathcal{Z}_{\leq\delta}([a,b])} (f(\tilde{x}_k) + g(\tilde{x}_k)) \cdot \delta_k \tag{6.8}$$

$$= \sum_{\mathcal{Z}_{\leq\delta}([a,b])} f(\tilde{x}_k) \cdot \delta_k + \sum_{\mathcal{Z}_{\leq\delta}([a,b])} g(\tilde{x}_k) \cdot \delta_k \tag{6.9}$$

(b) Es ist

$$\sum_{\mathcal{Z}_{\leq\delta}([a,b])} (\lambda \cdot f)(\tilde{x}_k) \cdot \delta_k = \sum_{\mathcal{Z}_{\leq\delta}([a,b])} \lambda \cdot f(\tilde{x}_k) \cdot \delta_k = \lambda \cdot \sum_{\mathcal{Z}_{\leq\delta}([a,b])} f(\tilde{x}_k) \cdot \delta_k \tag{6.10}$$

(c) Es ist

$$f \leq g \tag{6.11}$$

$$\Rightarrow \forall (\tilde{x}_k, \delta_k) \in \mathcal{Z}_{\leq\delta}[a,b] : f(\tilde{x}_k) \cdot \delta_k \leq g(\tilde{x}_k) \cdot \delta_k \tag{6.12}$$

$$\Rightarrow \sum_{\mathcal{Z}_{\leq\delta}([a,b])} f(\tilde{x}_k) \cdot \delta_k \leq \sum_{\mathcal{Z}_{\leq\delta}([a,b])} g(\tilde{x}_k) \cdot \delta_k \tag{6.13}$$

□

Eine wesentliche Eigenschaft des klassischen Integrals ist die, dass dieses Integral in Teilintegrale aufgeteilt werden kann. So ist $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ für alle $c \in [a,b]$. Gilt dies auch für unsere Definition?

Jedenfalls kann mit Hilfe des Zusammenhangs $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ und dem obigen ε-ungefähren Bestimmungssatz des bestimmten Integrals eine ε-ungefähre Variante bewiesen werden:

Satz 6.3 (ε-ungefähr Aufteilungssatz für Integrale)**.** *Für alle Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und für alle $c \in [a,b]$ ist*

$$\sum_{\mathcal{Z}_{\leq\delta}([a,b])} f(\tilde{x}_k) \cdot \delta_k \approx_{\leq 2\varepsilon(b-a)} \sum_{\mathcal{Z}_{\leq\delta}([a,c])} f(\tilde{x}_k) \cdot \delta_k + \sum_{\mathcal{Z}_{\leq\delta}([c,b])} f(\tilde{x}_k) \cdot \delta_k \tag{6.14}$$

Beweis.

$$\sum_{\mathcal{Z}_{\leq\,\delta}([a,b])} f(\tilde{x}_k)\cdot\delta_k \approx_{\leq\,\varepsilon(b-a)} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{6.15}$$

$$= \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{6.16}$$

$\downarrow$ Additionsregeln der Abstandsrelation (Satz 2.3)

$$\approx_{\leq\,\varepsilon(b-a)} \sum_{\mathcal{Z}_{\leq\,\delta}([a,c])} f(\tilde{x}_k)\cdot\delta_k + \sum_{\mathcal{Z}_{\leq\,\delta}([c,b])} f(\tilde{x}_k)\cdot\delta_k \tag{6.17}$$

$\downarrow$ schwache Transitivität (Satz 2.1)

$$\Rightarrow \sum_{\mathcal{Z}_{\leq\,\delta}([a,b])} f(\tilde{x}_k)\cdot\delta_k \approx_{\leq\,2\varepsilon(b-a)} \sum_{\mathcal{Z}_{\leq\,\delta}([a,c])} f(\tilde{x}_k)\cdot\delta_k + \sum_{\mathcal{Z}_{\leq\,\delta}([c,b])} f(\tilde{x}_k)\cdot\delta_k \tag{6.18}$$

□

Kapitel 7

Integration und Differentiation

In diesem Abschnitt will ich eine ε-ungefähre Variante des klassischen Fundamentalsatzes der Analysis beweisen. Der klassische Fundamentalsatz der Analysis besagt, dass für jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit der Stammfunktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ der Zusammenhang $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ gilt[2][13, Seite 201, Satz 3]. Wie sieht unsere Variante des Fundamentalsatzes aus?

Zunächst muss ich definieren, was für mich eine Stammfunktion ist:

Definition 7.1 (ε-δ-ungefähre Stammfunktion)**.** Eine Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt ε-δ-*ungefähre Stammfunktion* der Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, wenn F an jeder Stelle $x_0 \in [a,b]$ ε-δ-ungefähr differenzierbar ist, wobei $f(x_0)$ eine ε-δ-ungefähre Ableitung an dieser Stelle ist.

Satz 7.1 (ε-ungefähre Variante des Fundamentalsatzes der Analysis)**.** *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine ε-δ-ungefähr integrierbare Funktion und $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine ε-δ-ungefähre Stammfunktion dieser Funktion. Sei $\mathcal{Z}_{\leq\delta}$ eine Zerlegungsfunktion, die die Besonderheit aufweist, dass die k-te Zwischenstelle $\tilde{x}_k$ mit der $(k-1)$-ten Stützstelle x_{k-1} übereinstimmt. Es gilt dann der Zusammenhang* $\displaystyle\sum_{\mathcal{Z}_{\leq\delta}([a,b])} f(\tilde{x}_k)\cdot\delta_k \approx_{\leq\varepsilon(b-a)} F(b) - F(a)$.

Beweis. Seien x_0 bis x_n die Stützstellen aus der Zerlegung $\mathcal{Z}_{\leq\delta}([a,b])$. Da die Zwischenstelle $\tilde{x}_k$ nach Voraussetzung gleich x_{k-1} und die Feinheit der Zerlegung kleiner gleich δ ist, ist jede Länge δ_k des k-ten Intervalls $[x_{k-1}, x_k]$ kleiner gleich δ. Da F ε-δ-ungefähre Stammfunktion von f ist, ist

$$\forall h \approx_{\leq\delta} 0 : F(x_{k-1}+h) \approx_{\leq\varepsilon\cdot|h|} F(x_{k-1}) + f(x_{k-1})\cdot h \tag{7.1}$$

$$\Rightarrow \forall h \approx_{\leq\delta} 0 : F(x_{k-1}+h) - F(x_{k-1}) \approx_{\leq\varepsilon\cdot|h|} f(x_{k-1})\cdot h \tag{7.2}$$

$$\downarrow \text{ Wähle } h = \delta_k$$

$$\Rightarrow F(x_k) - F(x_{k-1}) \approx_{\leq\varepsilon\cdot\delta_k} f(x_{k-1})\cdot\delta_k \tag{7.3}$$

Damit ist

$$\sum_{\mathcal{Z}_{\leq\,\delta}([a,b])} f(\tilde{x}_k)\cdot\delta_k = \underbrace{f(x_0)\cdot\delta_1}_{\approx_{\leq\,\varepsilon\delta_1} F(x_1)-F(x_0)} + \underbrace{f(x_1)\cdot\delta_2}_{\approx_{\leq\,\varepsilon\delta_2} F(x_2)-F(x_1)} + \cdots + \underbrace{f(x_{n-1})\cdot\delta_n}_{\approx_{\leq\,\varepsilon\delta_n} F(x_n)-F(x_{n-1})} \tag{7.4}$$

$\downarrow$ Additionsregeln der Abstandsrelation (Satz 2.3)

$$\approx_{\leq\,\varepsilon(b-a)} \Big(F(x_1)-F(x_0)\Big)+\Big(F(x_2)-F(x_1)\Big)+\ldots \tag{7.5}$$
$$\ldots+\Big(F(x_n)-F(x_{n-1})\Big)$$

$$= F(x_n)-F(x_0) \tag{7.6}$$

$\downarrow$ $x_n = b \wedge x_0 = a$

$$= F(b)-F(a) \tag{7.7}$$

Obige Umformung beweist $\sum_{\mathcal{Z}_{\leq\,\delta}([a,b])} f(\tilde{x}_k)\cdot\delta_k \approx_{\leq\,\varepsilon(b-a)} F(b)-F(a)$. □

Kapitel 8

Schlussbemerkung

Ziel dieser Bachelorarbeit war es, einen alternativen Ansatz für eine Theorie der Analysis zu präsentieren. Dabei hatte ich nicht vor, eine möglichst vollständige Theorie auszuarbeiten. Ich wollte nur zeigen, dass der alternative Ansatz, die Abstandsrelation in den Mittelpunkt der Analysis zu rücken, fruchtbar ist und zu einer neuen Theorie der Analysis führt.

Wie du gelesen hast, orientierte sich meine Theorie streng an dem, was du schon aus der klassischen Analysis kennst. Alle hier dargelegten Begriffe und Konzepte werden bereits in der klassischen Analysis behandelt. Der große Unterschied ist der, dass ich die Begriffe und Konzepte der Analysis auf Grundlage der neuen Relation $\approx_{\leq \varepsilon}$ formuliert habe. So verändert sich ein wenig die Semantik und die Definitionen werden sogar allgemeiner. Auch Beweise können anders geführt werden (Beispiele sind der Fundamentalsatz der Analysis (Satz 7.1) und der Satz von Bolzano-Weierstraß (Satz 3.14)).

Durch die Abstandsrelation befreie ich mich ein wenig vom Diktat der Mathematik, alles eindeutig zu definieren. So sind in der von mir dargelegten Theorie Grenzwerte nicht mehr eindeutig sondern nur noch ungefähr eindeutig definiert. Natürlich blieb die Darstellung und die Beweisführung exakt, aber die Abstandsrelation bringt die Möglichkeit, über nicht ganz eindeutig bestimmte Objekte zu reden. Dies empfinde ich als sehr fruchtbar für die Mathematik.

Wie jeder neue Ansatz für eine Theorie ist auch dieser nicht vollständig oder perfekt. Es gibt sicherlich Alternativen oder Verbesserungen, die in Zukunft ausgekundschaftet werden wollen. Über Anregungen jeder Art bin ich dir sehr dankbar.

Was jetzt fehlt, ist die konkrete Anwendung meiner Theorie. Erst diese Anwendung kann den Nutzen dieser Theorie offenbaren und durch den Versuch der Anwendung werden sicherlich viele Verbesserungen gefunden. In meiner Bachelorarbeit in Physik will ich versuchen, bekannte physikalische Problemstellungen mit dieser Theorie zu beschreiben.

Vergesse auch bitte nicht, dass ich die hier dargestellte Theorie nur als einen Zwischenschritt in einer umfassenderen und abstrakteren Theorie des Infinitesimalen sehe. Hier liegt sicherlich noch ein weiter Weg vor mir, doch ich will gerne versuchen, diesen zu bestreiten.

Literaturverzeichnis

[1] Wikipedia-Artikel „*Fehlergzenze*“, November 2011. URL: `http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Fehlergrenze&oldid=93778455`. 7

[2] Wikipedia-Artikel „*Fundamentalsatz der Analysis*“, Dezember 2011. URL: `http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Fundamentalsatz_der_Analysis&oldid=95098171`. 45, 51

[3] Wikipedia-Artikel „*Gleichseitiges Dreieck*“, November 2011. URL: `http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Gleichseitiges_Dreieck&oldid=96545138`. 28

[4] Wikipedia-Artikel „*Lebesgue-Integral*“, November 2011. URL: `http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Lebesgue-Integral&oldid=95141048`. 43, 44

[5] Wikipedia-Artikel „*Riemann-Zerlegung*“, November 2011. URL: `http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Riemann-Zerlegung&oldid=73689334`. 45

[6] Wikipedia-Artikel „*Riemannsches Integral*“, November 2011. URL: `http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Riemannsches_Integral&oldid=96508441`. 43

[7] Wikipedia-Artikel „*Ideales Gas*“, Januar 2012. URL: `http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Ideales_Gas&oldid=98275610`. 1

[8] Wikipedia-Artikel „*Klassische Mechanik*“, Januar 2012. URL: `http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Klassische_Mechanik&oldid=98152655`. 1

[9] Wikipedia-Artikel „*Satz von Heine-Borel*“, Januar 2012. URL: `http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Satz_von_Heine-Borel&oldid=89071423`. 29

[10] L.D.L. und E. M. Lifschitz: *Lehrbuch der Theoretischen Physik*. Verlag Harri Deutsch, 1997. 14. Auflage. 1

[11] J. Elstrodt: *Maß- und Integrationstheorie*. Springer-Verlag, 2005. 4. Auflage. 43, 44

[12] T. Fließbach: *Mechanik*. Spektrum Akademischer Verlag, 2007. 5. Auflage. 1

[13] O. Forster: *Analysis 1.* Friedr. Vieweg & Sohn Verlag, 2004. 7. Auflage. xii, 37, 40, 43, 45, 51

[14] O. Forster: *Analysis 2.* Friedr. Vieweg & Sohn Verlag, 2005. 6. Auflage. 29

[15] P.T. und Gene Mosca: Spektrum Akademischer Verlag, 2007. 2. Auflage. 1

[16] R. Gerkmann. *Mathematik IV*, August 2011. URL: `http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~gerkmann/skripten/math4.pdf`. 43

[17] R. Goldblatt: *Lectures on the Hyperreals.* Springer-Verlag, 1998. II. Series. 31

[18] I. Kleiner, *Educational Studies in Mathematics* **48** (2006), 137. URL: `http://www.springerlink.com/content/r99j3glb1ctrtfjt/`. 43

Danksagung

Als erstes möchte ich mich bei meinem Betreuer, Herrn Prof. Dr. Horst Osswald, für seine gute Betreuung, seinen Rat und vor allem für die mir zugestandene Freiheit beim Schreiben dieser Bachelorarbeit bedanken. Danke, dass ich mir mein eigenes Thema frei wählen und die Bachelorarbeit selbstständig bearbeiten durfte.

Ein weiterer Dank geht an Familie Sciolto, bei denen ich in diesem Semester für zwei Monate wohnen durfte. So konnte ich in Ruhe meine Bachelorarbeit schreiben.

Ich möchte auch Dirk Kretschmann für seinen Hinweis zur ε-ungefähren Variante des Vollständigkeitsaxioms danken, als ich vergebens einen Beweis für höherdimensionale Räume suchte.