# 1 Feedback zum 5. Globalübungsblatt

## 1.1 Aufgabe 17

- Die Funktion in dieser Aufgabe war kein Homömorphismus. Es ist nämlich der Punkt $(0,0)$ im Wertebereich $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0)|x > 0\}$ enthalten, wird aber nicht durch die Funktion $f$ getroffen ($f$ ist damit nicht surjektiv). Auch wenn dies nur ein Tippfehler war, so hätte deine Antwort lauten müssen:

  "Die Funktion $f$ trifft den Punkt $(0,0)$ des Wertebereiches nicht, so dass diese Funktion nicht surjektiv ist. Damit ist die Funktion auch nicht bijektiv und nicht homöomorph"

- Beschränkungen von bijektiven Funktionen sind im Allgemeinen nicht bijektiv, da sie die Eigenschaft der Surjektivität verlieren können. Betrachte dazu das folgende Beispiel: Die Funktion $f : [0,1] \to [0,1] : \ x \mapsto x^2$ ist bijektiv. Jedoch ist die Beschränkung $f\Big|_{[0,\frac{1}{2}]} : [0,\frac{1}{2}] \to [0,1]$ von $f$ auf das Intervall $[0,\frac{1}{2}]$ nicht mehr surjektiv und damit nicht bijektiv. Demzufolge ist in der Aufgabe 17 die Surjektivität nochmal extra zu beweisen. (Man kann aber verwenden, dass Einschränkungen stetiger bzw. injektiver Funktionen wieder stetig bzw. injektiv sind)

- Beachte, dass Funktionen mit Fallunterscheidungen im Allgemeinen *nicht stetig* sind.

## 1.2 Aufgabe 18

- Die Abgeschlossenheit und Offenheit einer Menge ist *immer separat* zu beweisen. Da es zugleich offene und abgeschlossene Mengen gibt (wie die leere Menge) und Mengen existieren, die weder offen noch abgeschlossen sind (wie die Menge $]0,1]$ in $\mathbb{R}$), ist (im Allgemeinen) die Eigenschaft der Offenheit unabhängig von der Eigenschaft der Abgeschlossenheit.

  *Hinweis:* Wenn deine Grundmenge $X$ zusammenhängend ist, so sind $X$ und $\{\}$ die einzigen Mengen die zugleich offen und abgeschlossen sind (Bemerkung 1.72 im Skript). Diesen Satz kannst du nun verwenden, um in zusammenhängenden topologischen Räumen für Mengen ungleich $X$ und $\{\}$ von Offenheit auf Nicht-Abgeschlossenheit und von Abgeschlossenheit auf Nicht-Offenheit zu schließen. Jedoch gibt es auch in zusammenhängenden topologischen Räumen im Allgemienen Mengen die weder offen noch abgeschlossen sind.

- In Teilaufgabe (a.ii) ist die Menge $A$ ungleich der Menge $]0,1]$, da zum Beispiel das Element $1\frac{1}{2} \in A$ ist (es ist $|1\frac{1}{2} - \frac{1}{1}| < \frac{1}{1^2}$). Du kannst aber zeigen, dass in dieser Teilaufgabe $A = ]0,2[$ ist.

- Du kannst (ohne extra-Beweis) nur verwenden, dass **endliche** Vereinigungen abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen sind. Wenn du eine beliebige Vereinigung abgeschlossener Mengen hast, so ist diese im Allgemeinen nicht mehr abgeschlossen (zum Beispiel ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[\frac{1}{n}, 2-\frac{1}{n}] = ]0,2[$, welches nicht abgeschlossen ist). Jedoch darfst du verwenden, dass beliebige Schnitte von abgeschlossenen Mengen abgeschlossen sind.

  Bei der Eigenschaft der Offenheit verhält es sich genau umgekehrt: Beliebige Vereinigungen von offenen Mengen sind wieder offen, jedoch sind im Allgemeinen nur **endliche** Schnitte von offenen Mengen wieder offen.