Musteraufgaben zum Thema Zusammenhang

Stephan Kulla (CC-BY)

6.12.2011

1 Aufgabe 1

Für jedes $a \in \mathbb{R}$ definieren wir die Teilmenge $X_a \subseteq \mathbb{R}^2$ durch

$$X_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 \leq a\}$$

Bestimme in Abhängigkeit von a, ob X_a zusammenhängend bzw. wegzusammenhängend ist.

1.1 Lösungsweg/Vorüberlegungen - so kommst du auf die Lösung

Hier werde ich versuchen dir die Gedankengänge aufzugeigen, mit denen man auf die Lösung dieser Aufgabe kommen kann (es gibt sicherlich auch andere Möglichkeiten). Ich versuche dir hier das zu präsentieren, dass **vor** dem eigentlichen Beweis auf einem Schmierblatt passiert bzw. sich in deinen Kopf abspielen könnte. Den Beweis, den man als Lösung auf diese Aufgabe aufschreiben kann, werden wir erst im nächsten Abschnitt formulieren.

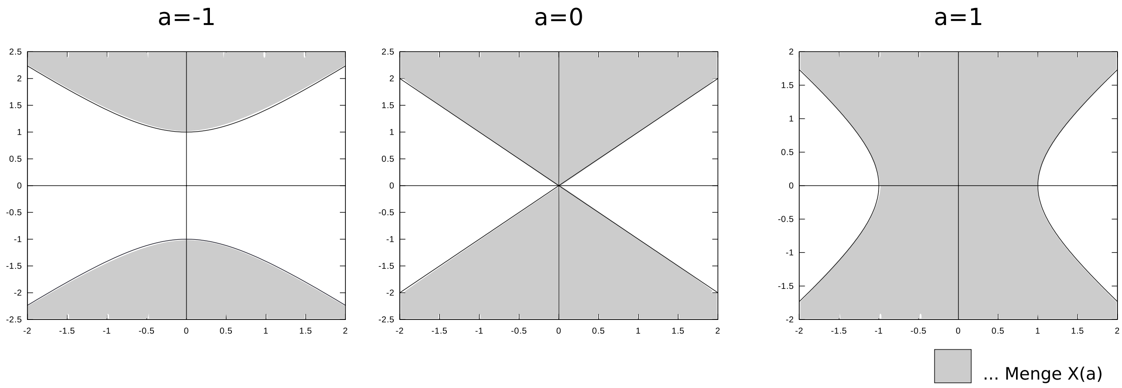
Wie sieht X_a aus? Zunächst sollten wir uns ein Bild davon machen, wie die Menge X_a aussieht. Hier sind Skizzen für einige Werte von a sinnvoll. Die Werte sollten so gewählt werden, dass wir hinterher ein möglichst vollständige Vorstellung von der Menge X_a besitzen (in den Aufgaben auf den Blättern dieser Woche werden dir sogar die Werte für die Skizze vorgeschlagen). Wählen wir $a = -1$, $a = 0$ und $a = 1$. So haben wir erstmal eine positive und eine negative Zahl und die Zahl 0 (die weder positiv noch negativ ist) für a ausgewählt, in der Hoffnung, dass diese Werte ausreichen.
Wie finden wir die Skizzen zu einem Wert von a? Stellen wir die Bedingung $x^2 - y^2 \leq a$ um:

$$x^2 - y^2 \leq a \;\Leftrightarrow\; y^2 \geq x^2 - a$$

Für $x^2 - a \leq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq a \Leftrightarrow |x| \leq \sqrt{a}$ ($x^2 \leq a$ kann nur erfüllt sein, wenn $a \geq 0$ ist) ist obige Gleichung wegen $y^2 \geq 0$ stets erfüllt. Damit ist die Menge $[-\sqrt{a}, \sqrt{a}] \times \mathbb{R} \subseteq X_a$ für alle $a \geq 0$. Für $x^2 - a \geq 0$ erhalten wir

$$x^2 - y^2 \leq a \;\Leftrightarrow\; y^2 \geq x^2 - a \;\Leftrightarrow\; |y| \geq \sqrt{x^2 - a} \;\Leftrightarrow\; \left(y \geq \sqrt{x^2 - a}\right) \vee \left(y \leq -\sqrt{x^2 - a}\right)$$

Damit erhalten wir folgende Skizzen für die Menge X_a:



Nun kannst du versuchen dir vorstellen, wie X_a für andere Werte von a aussieht. Wie verändert sich X_a, wenn man a kontinuierlich verändert?

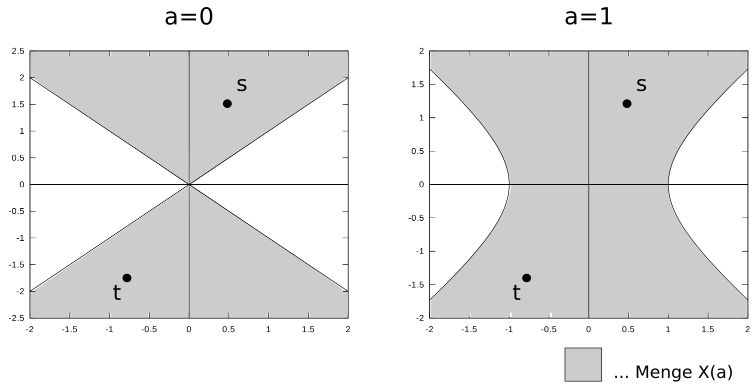
Was sehen wir in der Skizze? Wir kommen zu folgendem Ergebnis: Für negative Werte von a zerfällt X_a in zwei Zusammenhangskomponenten. Die eine Zusammenhangskomponente liegt in der Halbebene mit positiven y, die andere liegt in der Halbebene mit negativen y (siehe Skizze für $a = -1$). Für $a \geq 0$ sieht man, dass X_a nur eine Zusammenhangskomponente besitzt, also zusammenhängend ist (siehe Skizze $a = 0$ und $a = 1$; beachte, dass im Fall $a = 0$, der Nullpunkt mit zur Menge X_a gehört und damit eine Verbindung der oberen Halbebene zur unteren Halbebene darstellt).

Wie formulieren wir den Beweis für negative a? Nun geht es darum, unsere obige Lösungsidee aus unserer Anschauung in einen Beweis umzumünzen (Bedenke: Zwar hat Einstein mal gesagt, dass Vorstellungskraft wichtiger als Wissen sei, jedoch kann sich unsere Intuition schnell täuschen und in vielen Fällen versagt die menschliche Anschauung. Deswegen ersetzt menschliche Intuition/Anschauung keinen Beweis). Für den Fall negativer Werte für a haben wir aus der Skizze gesehen, dass X_a in zwei Zusammenhangskomponenten zerfällt: Die mit Werten für y größer als 0 und die mit Werten für y kleiner als 0. Insbesondere besitzt dann X_a keine Punkte mit y-Werte gleich 0.
Nutzen wir dieses Ergebnis aus: Wir zerlegen X_a in $U = \{(x, y) \in X_a \mid y > 0\}$ und $V = \{(x, y) \in X_a \mid y < 0\}$. Es ist $X_a = U \cup V$ (um dies zu zeigen, müssen wir beweisen, dass es in X_a keine Punkte mit y-Werte gleich Null gibt - was recht einfach sein sollte). U und V sind disjunkt nach Definition und nach Inutition offen und nichtleer. Damit haben wir zwei disjunkte, nicht leere und offene Teilmengen von X_a gefunden, deren Vereinigung X_a ist. Dies beweist, dass X_a nicht zusammenhängend ist (siehe Skript oder Arbeitsblatt zum Thema Zusammenhang).
Wie beweisen wir aber, dass U und V nicht leer und offen sind? Um zu zeigen, dass sie nicht leer sind, reicht es Punkte $u \in U$ und $v \in V$ anzugeben, die frei und beliebig gewählt werden können. Für den Beweis der Offenheit machen wir folgendes: Sei $f_y : X_a \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto y$ die Funktion, die uns die y-Komponente eines Punktes aus X_a zurückgibt. Diese Funktion ist als y-Komponente der stets stetigen Identitätsfunktion $id : X_a \to X_a : (x, y) \mapsto (x, y)$ wieder stetig. Es ist

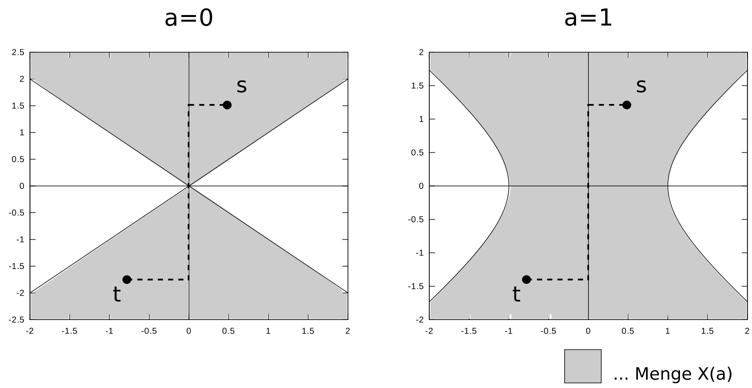
$$U = \{(x,y) \in X_a \,|\, y > 0\} = \{(x,y) \in X_a \,|\, f_y(x,y) > 0\} = \{(x,y) \in X_a \,|\, f_y(x,y) \in \mathbb{R}^+\}$$
$$= \underbrace{f_y^{-1}(\underbrace{\mathbb{R}^+}_{\text{offen in } \mathbb{R}})}_{\text{Urbild einer offenen Menge unter der stetigen Funktion} f_y}$$

Da Urbilder offener Mengen unter stetigen Funktionen wieder offen sind, ist damit U offen. Analog können wir die Offenheit von V beweisen.

Wie formulieren wir den Beweis für $a \geq 0$? Hier sagt uns unsere Intuition, dass X_a wegzusammenhängend ist. Wir müssen also zeigen: Wenn man zwei Punkte $s = (x_1, y_1)$ und $t = (x_2, y_2)$ aus X_a, so muss man ein Weg zwischen diesen beiden Punkten finden, der ganz in X_a liegt. Wir haben also folgendes Problem: Finde einen Weg, beliebige Punkte s und t in X_a durch einen Weg miteinander zu verbinden, der in allen Fällen von $a \geq 0$ funktioniert.



Die Lösung: Haben wir zwei Punkt $s = (x_1, y_1)$ und $t = (x_2, y_2)$ aus X_a, so bilden wir den Streckenzug $[(x_1, y_1),\, (0, y_1)]$, $[(0, y_1),\, (0, y_2)]$ und $[(0, y_2),\, (x_2, y_1)]$, wie die folgende Skizze zeigt



Es ist zu beweisen, dass jeweils die Streckenzüge $[(x_1, y_1),\, (0, y_1)]$, $[(0, y_1),\, (0, y_2)]$ und $[(0, y_2), (x_2, y_1)]$ in X_a liegen. Hier können wir folgendes ausnutzen: Ist $(x, y) \in X_a$, so ist auch jedes $(\tilde{x}, y)$ mit $|\tilde{x}| \leq |x|$ ein Element aus X_a. Dies folgt aus der Ungleichung $x^2 - y^2 \leq a$, denn es ist dann $\tilde{x}^2 - y^2 \overset{|\tilde{x}| \leq |x|}{\leq} x^2 - y^2 \leq a$. Dies beweist, dass die Streckenzüge $[(x_1, y_1),\, (0, y_1)]$ und $[(0, y_2),\, (x_2, y_1)]$ vollständig in X_a liegen, da für die Punkte der Streckenzüge die Beträge der x-Komponente kleiner gleich $|x_1|$ bzw. $|x_2|$ sind.

Nun ist noch zu zeigen, dass $[(0, y_1),\ (0, y_2)]$ vollständig in X_a liegt. Dies folgt aber aus der Tatsache, dass der Streckenzug $[(0, y_1),\ (0, y_2)]$ komplett auf der y-Achse liegt und die komplette y-Achse in X_a liegt (wie sich hoffentlich leicht zeigen lässt).

Doch wie lässen sich die drei Strecken zu einem Weg verbinden? Seien

$$\begin{aligned}
\gamma_1 : [0,1] \to X_a : t \mapsto t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + (1-t) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \end{pmatrix} \\
\gamma_2 : [0,1] \to X_a : t \mapsto t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \end{pmatrix} + (1-t) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \end{pmatrix} \\
\gamma_3 : [0,1] \to X_a : t \mapsto t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \end{pmatrix} + (1-t) \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

die drei Streckenzüge $[(x_1, y_1),\ (0, y_1)]$, $[(0, y_1),\ (0, y_2)]$ und $[(0, y_2),\ (x_2, y_1)]$. Gesucht ist eine stetige Funktion $\gamma : [0,1] \to X_a$, die alle 3 Strecken nacheinander abläuft. Hierzu unterteilen wir $[0,1]$ in die drei gleichgroßen Teilintervalle $[0, \frac{1}{3}]$, $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ und $]\frac{2}{3}, 1]$. Wir lassen γ in jeden Teilintervall jeweils einen der Streckenzüge komplett ablaufen:

$$\gamma : [0,1] \to X_a : t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(3t) & \text{für } 0 \le t \le \frac{1}{3} \\ \gamma_2(3t-1) & \text{für } \frac{1}{3} < t \le \frac{2}{3} \\ \gamma_3(3t-2) & \text{für } \frac{2}{3} < t \le 1 \end{cases}$$

Beachte, dass die Argumente $3t$, $3t-1$ und $3t-2$ so gewählt wurden, dass sie das jeweilge Intervall $[0, \frac{1}{3}]$, $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ bzw. $]\frac{2}{3}, 1]$ auf $[0,1]$ abbilden, wobei nacheinander die Werte von 0 bis 1 angenommen werden.

1.2 Beweis - so kannst du deine Ergebnisse aufschreiben

Im Fall negativer a ist X_a nicht zusammenhängend und im Fall $a \ge 0$ ist X_a wegzusammenhängend und damit zusammenhängend.

Fall $a < 0$: Sei $U := \{(x,y) \in X_a \,|\, y > 0\}$ und $V := \{(x,y) \in X_a \,|\, y < 0\}$. Nach Definition sind beide Mengen disjunkt. Da außderdem $(0, \sqrt{|a|}) \in U$ und $(0, -\sqrt{|a|}) \in V$ ist (wegen $0^2 - (\pm\sqrt{|a|})^2 = a \le a$), ist U und V nicht leer. Sei $f_y : X_a \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto y$, die als y-Komponente der stetigen Identitätsabbildung auf X_a wieder stetig ist. Es ist

$$\begin{aligned}
U &= \{(x,y) \in X_a \,|\, y > 0\} = \{(x,y) \in X_a \,|\, f_y(x,y) > 0\} = \{(x,y) \in X_a \,|\, f_y(x,y) \in \mathbb{R}^+\} \\
&= \underbrace{f_y^{-1}(\underbrace{\mathbb{R}^+}_{\text{offen in } \mathbb{R}})}_{\text{Urbild einer offenen Menge unter der stetigen Funktion} f_y}
\end{aligned}$$

und

$$V = \{(x,y) \in X_a \,|\, y < 0\} = \{(x,y) \in X_a \,|\, f_y(x,y) < 0\} = \{(x,y) \in X_a \,|\, f_y(x,y) \in \mathbb{R}^-\}$$
$$= \underbrace{f_y^{-1}(\underbrace{\mathbb{R}^-}_{\text{offen in } \mathbb{R}})}_{\text{Urbild einer offenen Menge unter der stetigen Funktion} f_y}$$

so dass U und V offene Mengen sind. Für negative a gibt es keinen Punkt (x,y) in X_a mit $y = 0$, da die Ungleichung $x^2 - y^2 \leq a < 0 \overset{y=0}{\Leftrightarrow} x^2 \leq a < 0$ nicht erfüllt werden kann. Damit ist $X_a = U \cup V$. Es lässt sich also X_a in zwei offene, disjunkte und nicht leere Teilmengen zerlegen (nämlich U und V). Damit ist X_a nicht zusammenhängend.

Fall $a \geq 0$: X_a ist wegzusammenhängend und damit zusammenhängend. Seien dazu $s = (x_1, y_1)$ und $t = (x_2, y_2)$ zwei beliebige Punkte aus X_a. Weil für alle $(\tilde{x}, y)$ mit $|\tilde{x}| \leq |x|$ und $(x,y) \in X_a$ gilt, dass $(\tilde{x}, y) \in X_a$ ist (es ist $\tilde{x}^2 - y^2 \overset{|\tilde{x}| \leq |x|}{\leq} x^2 - y^2 \overset{(x,y) \in X_a}{\leq} a$), sind die Streckenzüge $[(x_1, y_1), (0, y_1)]$ und $[(0, y_2), (x_2, y_2)]$ komplett in X_a enthalten. Außerdem ist die komplette y-Achse in X_a enthalten, da mit $a \geq 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $x^2 - y^2 \overset{x=0}{=} -y^2 \leq 0 \leq a$ erfüllt ist. Es damit die Strecke $[(0, y_1), (0, y_2)]$ komplett in X_a enthalten.
Somit liegt der Streckenzug $([(x_1, y_1), (0, y_1)]; [(0, y_1), (0, y_2)]; [(0, y_2), (x_2, y_2)])$, welcher die Punkte s und t miteinander verbindet, vollständig in X_a, so dass X_a wegzusammenhängend ist.