Musteraufgaben zum Thema Differenzierbarkeit

Stephan Kulla (CC-BY)

13.12.2010

1 Aufgabe 1

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|y+x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Untersuchen sie für welche $v \in \mathbb{R}^2$ die Richtungsableitung $\partial_v f(0,0)$ existiert und geben sie diese gegebenenfalls an. Ist f im Nullpunkt stetig bzw. differenzierbar?

1.1 Lösungsweg - so kommst du auf die Lösung

Richtungsableitung Sei $v := (a,b) \in \mathbb{R}^2$ mit $(a,b) \neq (0,0)$ ein beliebiger Vektor bzgl. dessen wir die Richtungsableitung bestimmen wollen.

Bestimmung der Richtungsableitung $\partial_{(a,b)}f(x_0,y_0)$	**Lösungsweg in unserem Fall**
Hilfsfunktion $h(t) = f((x_0,y_0)+t(a,b)) = f(x_0+ta,y_0+tb)$ bestimmen.	$h(t) = f(0+ta,0+tb) = f(ta,tb)$ $= \begin{cases} \frac{\lvert ta\rvert tb+ta\lvert tb\rvert}{\sqrt{(ta)^2+(tb)^2}} & \text{für } (ta,tb)\neq(0,0) \\ 0 & \text{für } (ta,tb)=(0,0) \end{cases}$ $\downarrow (ta,tb)=(0,0) \Leftrightarrow t=0$ $= \begin{cases} \frac{\lvert ta\rvert tb+ta\lvert tb\rvert}{\sqrt{(ta)^2+(tb)^2}} & \text{für } t\neq 0 \\ 0 & \text{für } t=0 \end{cases}$ $= \begin{cases} \frac{\lvert t\rvert t\cdot(\lvert a\rvert b+a\lvert b\rvert)}{\sqrt{t^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}} & \text{für } t\neq 0 \\ 0 & \text{für } t=0 \end{cases}$ $\downarrow \sqrt{t^2}=\lvert t\rvert$ $= \begin{cases} \frac{\lvert t\rvert t\cdot(\lvert a\rvert b+a\lvert b\rvert)}{\lvert t\rvert\cdot\sqrt{a^2+b^2}} & \text{für } t\neq 0 \\ 0 & \text{für } t=0 \end{cases}$ $= \begin{cases} t\cdot\frac{(\lvert a\rvert b+a\lvert b\rvert)}{\sqrt{a^2+b^2}} & \text{für } t\neq 0 \\ 0 & \text{für } t=0 \end{cases}$ $\downarrow t\cdot\frac{(\lvert a\rvert b+a\lvert b\rvert)}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ist auch für $t=0$ gleich 0 $= t\cdot\frac{(\lvert a\rvert b+a\lvert b\rvert)}{\sqrt{a^2+b^2}}$
Ist $h(t)$ im Punkt $t=0$ differenzierbar? Wenn ja, dann ist die Richtungsableitung $\partial_{(a,b)}f(x_0,y_0)=h'(0)$. Wenn nein, dann existiert die Richtungsableitung nicht.	Die Hilfsfunktion $h(t)$ ist eine lineare Funktion und damit im Nullpunkt differenzierbar. Es existieren also alle Richtungsableitungen mit $\partial_{(a,b)}f(0,0)=h'(0)=\frac{(\lvert a\rvert b+a\lvert b\rvert)}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Stetigkeit Zur Bestimmung der Stetigkeit sollten wir zunächst eine Vermutung aufstellen, ob die Funktion im Nullpunkt stetig ist, oder nicht. Ein Weg, ihre Stetigkeit im Nullpunkt zu beweisen, ist der, dass wir *beliebige* Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$ annehmen und zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = f(0,0)$ ist. Um zu beweisen, dass die Funktion f im Nullpunkt nicht stetig ist, können wir versuchen *bestimmte* Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$ und $\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) \neq f(0,0)$ zu finden.

Schauen wir uns mal die Funktion für $(x,y)\neq(0,0)$ an:

$$f(x,y) = \frac{\overbrace{\overbrace{|x|y}^{\text{quadratischer Term}} + \overbrace{x|y|}^{\text{quadratischer Term}}}^{\text{quadratischer Term (Summe quadratischer Terme)}}}{\underbrace{\sqrt{\underbrace{\underbrace{x^2}_{\text{quadratischer Term}} + \underbrace{y^2}_{\text{quadratischer Term}}}_{\text{quadratischer Term (Summe quadratischer Terme)}}}}_{\text{linearer Term (Wurzel quadratischer Term)}}}$$

Hierbei sind die Begriffe "quadratischer Term" und "linearer Term" nicht in ihrer mathematischen Definition, sondern mehr in einer naiven Sichtweise zu verstehen: Sie sollen angeben, wie die Argumente x und y in die jeweiligen Terme eingehen. Da es sich hier bei $f(x,y)$ um einen Quotienten eines "quadratischen Terms" mit einem "linearen Term" handelt, sollte die Funktion $f(x,y)$ stetig im Nullpunkt sein, weil der "quadratische Term" im Nenner überwiegt.
Achtung: Ich verlasse mit dieser Argumentation mathematische Denkweisen, indem ich weder genau definiere, was ich mit "quadratischen" und "linearen Termen" meine, noch beweise, dass beispielsweise eine Funktion als Quotient eines "quadratischen Terms" mit einem "linearen Term" im Nullpunkt stetig ist. Eine solche Argumentation *kann deshalb nicht in einem Beweis eingesetzt werden.* Diese Überlegungen dienen jediglich dazu im Vorfeld eine Vermutung über die Stetigkeit der Funktion f aufzustellen.

Um die Stetigkeit zu beweisen, verwenden wir hier das Folgenkriterium. Sei dazu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beliebige, reelle Nullfolgen. Wir wollen nun zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = f(0,0) = 0$ ist, was äquivalent zu $\lim_{n\to\infty} |f(x_n,y_n)| = 0$ ist. Wegen der Fallunterscheidung in der Funktion f nehmen wir außerdem an, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $(x_n,y_n) \neq (0,0)$ erfüllt ist. Da die Limesbestimmung des Terms $\left|\frac{|x_n|y_n + x_n|y_n|}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}}\right|$ schwierig ist, suchen wir eine Abschätzung nach oben, die uns das Leben erleichtert:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{|x_n|y_n + x_n|y_n|}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}}\right| &= \left|\frac{|x_n|y_n}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}} + \frac{x_n|y_n|}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}}\right| \\
&\downarrow \text{Dreiecksungleichung} \\
&\leq \left|\frac{|x_n|y_n}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}}\right| + \left|\frac{x_n|y_n|}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}}\right| \\
&= \frac{|x_n|\cdot|y_n|}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}} + \frac{|x_n|\cdot|y_n|}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}} \\
&\Big\downarrow\ \sqrt{x_n^2+y_n^2} \geq \sqrt{x_n^2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{x_n^2}} \\
&\leq \frac{|x_n|\cdot|y_n|}{\sqrt{x_n^2}} + \frac{|x_n|\cdot|y_n|}{\sqrt{x_n^2}} \\
&\Big\downarrow\ \sqrt{x_n^2} = |x_n| \\
&= \frac{|x_n|\cdot|y_n|}{|x_n|} + \frac{|x_n|\cdot|y_n|}{|x_n|} \\
&= |y_n| + |y_n| = 2|y_n|
\end{aligned}$$

Da $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Vorraussetzung eine Nullfolge ist, ist $\lim_{n\to\infty} 2|y_n| = 0$ und wir haben einen Beweis der Stetigkeit gefunden, denn

$$\begin{array}{rcccl}
0 & \leq & \left|\frac{|x_n|y_n+x_n|y_n|}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}}\right| & \leq 2|y_n| \\
\Rightarrow \quad 0 = \lim_{n\to\infty} 0 & \leq & \lim_{n\to\infty}\left|\frac{|x_n|y_n+x_n|y_n|}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}}\right| & \leq \lim_{n\to\infty} 2|y_n| = 0
\end{array}$$

Differenzierbarkeit Um zu überprüfen, ob die Funktion im Nullpunkt differenzierbar ist, können wir zunächst einmal nachprüfen, ob die Funktion folgenden Satz aus der Vorlesung erfüllt (Folgerung 2.2.6):

Seien V ein endlich-dimensionaler normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum, $U \subseteq V$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in U$ differenzierbar. Für alle $v, w \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$\partial_{v+w} f(x_0) = \partial_v f(x_0) + \partial_w f(x_0) \quad \text{und} \quad \partial_{\lambda\cdot v} f(x_0) = \lambda \cdot \partial_v f(x_0)$$

Nach einigem Überlegen finden wir

$$\begin{aligned}
\partial_{(1,0)} f(0,0) + \partial_{(0,1)} f(0,0) &= \frac{(|1|\cdot 0 + 1\cdot|0|)}{\sqrt{1^2+0^2}} + \frac{(|0|\cdot 1 + 0\cdot|1|)}{\sqrt{0^2+1^2}} \\
&= 0 \neq \sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{(|1|\cdot 1 + 1\cdot|1|)}{\sqrt{1^2+1^2}} = \partial_{(1,1)} f(0,0)
\end{aligned}$$

was dem obigen Satz aus der Vorlesung widerspricht. Damit ist die Funktion nicht differenzierbar im Nullpunkt.

1.2 Beweis - so kannst du deine Ergebnisse aufschreiben

Richtungsableitung Sei $v := (a,b) \in \mathbb{R}^2$ mit $(a,b) \neq (0,0)$ ein beliebiger Vektor und sei $h(t) := f(ta, tb)$ die Hilfsfunktion zur Bestimmung der partiellen Ableitung $\partial_{(a,b)} f(0,0)$. Es ist

$$
\begin{aligned}
h(t) &= f(0+ta, 0+tb) = f(ta, tb) \\
&= \begin{cases} \frac{|ta|tb+ta|tb|}{\sqrt{(ta)^2+(tb)^2}} & \text{für } (ta,tb) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (ta,tb) = (0,0) \end{cases} \\
&\quad \Big\downarrow \; (ta,tb) = (0,0) \Leftrightarrow t = 0 \\
&= \begin{cases} \frac{|ta|tb+ta|tb|}{\sqrt{(ta)^2+(tb)^2}} & \text{für } t \neq 0 \\ 0 & \text{für } t = 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{|t|t\cdot(|a|b+a|b|)}{\sqrt{t^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}} & \text{für } t \neq 0 \\ 0 & \text{für } t = 0 \end{cases} \\
&\quad \Big\downarrow \; \sqrt{t^2} = |t| \\
&= \begin{cases} \frac{|t|t\cdot(|a|b+a|b|)}{|t|\cdot\sqrt{a^2+b^2}} & \text{für } t \neq 0 \\ 0 & \text{für } t = 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} t \cdot \frac{(|a|b+a|b|)}{\sqrt{a^2+b^2}} & \text{für } t \neq 0 \\ 0 & \text{für } t = 0 \end{cases} \\
&\quad \Big\downarrow \; t \cdot \frac{(|a|b+a|b|)}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ ist auch für } t = 0 \text{ gleich } 0 \\
&= t \cdot \frac{(|a|b+a|b|)}{\sqrt{a^2+b^2}}
\end{aligned}
$$

Die Hilfsfunktion $h(t)$ ist eine lineare Funktion und damit im Nullpunkt differenzierbar. Es existieren also alle Richtungsableitungen mit $\partial_{(a,b)} f(0,0) = h'(0) = \frac{(|a|b+a|b|)}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Stetigkeit Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei beliebige reelle Nullfolgen. Es ist

$$
\begin{aligned}
0 \le \lim_{n\to\infty} \left| \frac{|x_n|y_n + x_n|y_n|}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{|x_n|y_n}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}} + \frac{x_n|y_n|}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}} \right| \\
&\downarrow \text{Dreiecksungleichung} \\
&\le \lim_{n\to\infty} \left| \frac{|x_n|y_n}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}} \right| + \left| \frac{x_n|y_n|}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{|x_n|\cdot|y_n|}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}} + \frac{|x_n|\cdot|y_n|}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}} \\
&\Big\downarrow \sqrt{x_n^2+y_n^2} \ge \sqrt{x_n^2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}} \le \frac{1}{\sqrt{x_n^2}} \\
&\le \lim_{n\to\infty} \frac{|x_n|\cdot|y_n|}{\sqrt{x_n^2}} + \frac{|x_n|\cdot|y_n|}{\sqrt{x_n^2}} \\
&\Big\downarrow \sqrt{x_n^2} = |x_n| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{|x_n|\cdot|y_n|}{|x_n|} + \frac{|x_n|\cdot|y_n|}{|x_n|} \\
&= \lim_{n\to\infty} |y_n| + |y_n| \\
&= \lim_{n\to\infty} 2|y_n| = 0
\end{aligned}
$$

Damit ist $\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = 0 = f(0,0)$, so dass die Funktion f nach dem Folgenkriterium im Nullpunkt stetig ist.

Differenzierbarkeit Es ist

$$
\begin{aligned}
\partial_{(1,0)} f(0,0) + \partial_{(0,1)} f(0,0) &= \frac{(|1|\cdot 0 + 1\cdot|0|)}{\sqrt{1^2+0^2}} + \frac{(|0|\cdot 1 + 0\cdot|1|)}{\sqrt{0^2+1^2}} \\
&= 0 \ne \sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{(|1|\cdot 1 + 1\cdot|1|)}{\sqrt{1^2+1^2}} = \partial_{(1,1)} f(0,0)
\end{aligned}
$$

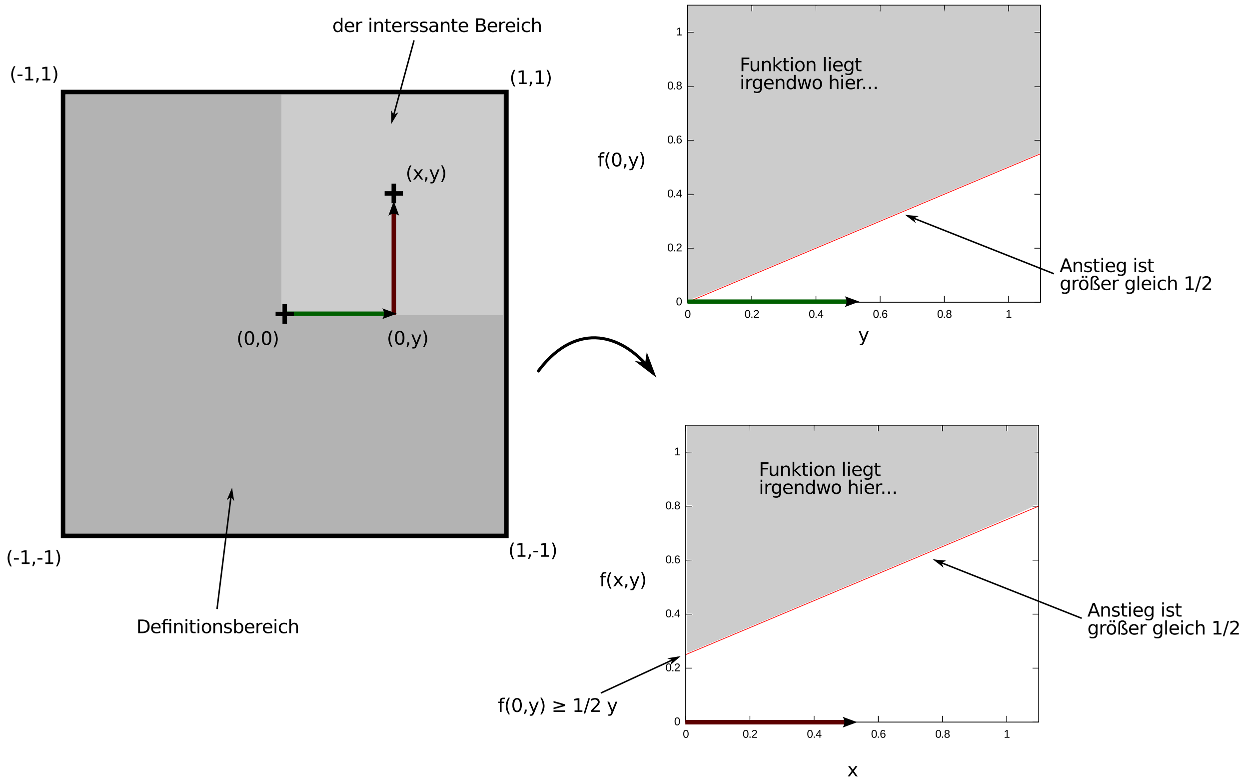
Dies widerspricht der Folgerung 2.2.6 aus dem Skript für differenzierbare Funktionen, so dass f im Nullpunkt nicht differenzierbar ist.

2 Aufgabe 2

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine auf $\mathbb{R}^2$ differenzierbare Funktion. Wir setzen voraus, dass $f(0,0) = 0$ ist und für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ die Abschätzung $\partial_y f(x,y) \ge \frac{1}{2}$ und $\partial_x f(x,y) \ge \frac{1}{2}$ erfüllt ist. Zeigen sie, dass dann für alle $x, y \in [0,1]$ die Ungleichung $f(x,y) \ge \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$ gilt.

2.1 Erklärung zum Beweis

Wir werden diese Aufgabe lösen, indem wir in 2 Schritten vorgehen. Um zu beweisen, dass $f(x,y) \geq \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$ ist, werden wir zunächst zeigen, dass $f(0,y) \geq \frac{1}{2}y$ ist und dann beweisen, dass $f(x,y) \geq \frac{1}{2}x + f(0,y)$ ist, wobei wir jeweils analog vorgehen werden.



2.2 Beweis

Beweisschritt 1 Es gilt: $\forall y \in [0,1] : f(0,y) \geq \frac{1}{2}y$.

Widerspruchsbeweis: Für $y = 0$ ist die obige Ungleichung $f(0,y) \geq \frac{1}{2}y$ wegen $f(0,0) = 0$ erfüllt. Sei nun $y \in [0,1] \setminus \{0\}$ eine reelle Zahl mit $f(0,y) < \frac{1}{2}y$. Es ist

$$\frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \frac{f(0,y)}{y} \overset{f(0,y)<\frac{1}{2}y}{<} \frac{\frac{1}{2}y}{y} = \frac{1}{2}$$

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es nun ein ein $a \in [0,y]$ mit $\partial_y f(0,a) = \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} < \frac{1}{2}$. Dies steht jedoch im Widerspruch zu $\partial_y f(x,y) \geq \frac{1}{2}$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, so dass obige Aussage $\forall y \in [0,1] : f(0,y) \geq \frac{1}{2}y$ wahr ist.

Beweisschritt 2 Es gilt: $\forall x, y \in [0,1] : f(x,y) \geq \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$.

Widerspruchsbeweis: Für $x = 0$ ist die Ungleichung $f(x,y) \geq \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$ nach dem ersten Beweisschritt erfüllt. Sein nun $y \in [0,1]$ und $x \in [0,1] \setminus \{0\}$ mit $f(x,y) < \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$. Es ist nun

$$\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x-0} = \frac{f(x,y)-f(0,y)}{x} \overset{f(0,y)\geq\frac{1}{2}y}{\leq} \frac{f(x,y)-\frac{1}{2}y}{x}$$

$$\overset{f(x,y)<\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y}{<} \frac{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}y}{x} = \frac{\frac{1}{2}x}{x} = \frac{1}{2}$$

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es ein $a \in [0,x]$ mit $\partial_x f(a,x) = \frac{f(x,y)-f(0,y)}{x-0} < \frac{1}{2}$. Dies steht jedoch im Widerspruch zu $\partial_x f(x,y) \geq \frac{1}{2}$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, so dass obige Aussage $\forall x,y \in [0,1] : f(x,y) \geq \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$ wahr ist.

3 Aufgabe 3

Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x,t) \mapsto \sin\left(2\|k\|^2 \cdot t - \langle x,k\rangle\right) \cdot \exp(-\langle k,x\rangle)$ mit $k \in \mathbb{R}^n$ die so genannte Wärmeleitungsgleichung $\Delta f - \partial_t f = 0$ erfüllt. Dabei ist $\|\cdot\|$ die euklidische Norm $\|\tilde{x}\| = \sqrt{\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 + \ldots + \tilde{x}_n^2}$ ($\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$) und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.

3.1 Lösung

Zur Bestimmung von Δf benötigen wir die zweite partielle Ableitung $\partial_l^2 f = \partial_l[\partial_l f]$ der Funktion f bzgl. des l-ten Einheitsvektors. Hierzu bestimmen wir zunächst $\partial_l f$. Beachte, dass du $\partial_l[\langle k,x\rangle]$ folgendermaßen berechnen kannst.

$$\partial_l[\langle k,x\rangle] = \partial_l[k_1 \cdot x_1 + k_2 \cdot x_2 + \ldots + k_n \cdot x_n] = k_l$$

Es ist

$$\begin{aligned}
\partial_l f &= \partial_l\left[\sin\left(2\|k\|^2 \cdot t - \langle x,k\rangle\right) \cdot \exp(-\langle k,x\rangle)\right] \\
&= \partial_l\left[\sin\left(2\|k\|^2 \cdot t - \langle x,k\rangle\right)\right] \cdot \exp(-\langle k,x\rangle) + \sin\left(2\|k\|^2 \cdot t - \langle x,k\rangle\right) \cdot \partial_l[\exp(-\langle k,x\rangle)] \\
&= \cos\left(2\|k\|^2 \cdot t - \langle x,k\rangle\right) \cdot (-k_l) \cdot \exp(-\langle k,x\rangle) + \sin\left(2\|k\|^2 \cdot t - \langle x,k\rangle\right) \cdot \exp(-\langle k,x\rangle) \cdot (-k_l) \\
&= -k_l \cdot \exp(-\langle k,x\rangle) \cdot \left(\cos\left(2\|k\|^2 \cdot t - \langle x,k\rangle\right) + \sin\left(2\|k\|^2 \cdot t - \langle x,k\rangle\right)\right)
\end{aligned}$$

Nun können wir $\partial_l^2 f$ bestimmen. Es ist

$$
\begin{aligned}
\partial_l^2 f &= \partial_l\left[\partial_l f\right] \\
&= \partial_l\left[-k_l \cdot \exp\left(-\langle k,x\rangle\right)\cdot\left(\cos\left(2\left\|k\right\|^2\cdot t-\langle x,k\rangle\right)+\sin\left(2\left\|k\right\|^2\cdot t-\langle x,k\rangle\right)\right)\right] \\
&= -k_l\cdot\exp\left(-\langle k,x\rangle\right)\cdot(-k_l)\cdot\left(\cos\left(2\left\|k\right\|^2\cdot t-\langle x,k\rangle\right)+\sin\left(2\left\|k\right\|^2\cdot t-\langle x,k\rangle\right)\right) \\
&\quad+(-k_l)\cdot\exp\left(-\langle k,x\rangle\right)\cdot\left(-\sin\left(2\left\|k\right\|^2\cdot t-\langle x,k\rangle\right)\cdot(-k_l)+\cos\left(2\left\|k\right\|^2\cdot t-\langle x,k\rangle\right)\cdot(-k_l)\right) \\
&= k_l^2\cdot\exp\left(-\langle k,x\rangle\right) \\
&\quad\cdot\left(\cos\left(2\left\|k\right\|^2\cdot t-\langle x,k\rangle\right)+\sin\left(2\left\|k\right\|^2\cdot t-\langle x,k\rangle\right)-\sin\left(2\left\|k\right\|^2\cdot t-\langle x,k\rangle\right)\right. \\
&\qquad\left.+\cos\left(2\left\|k\right\|^2\cdot t-\langle x,k\rangle\right)\right) \\
&= 2\cdot k_l^2\cdot\exp\left(-\langle k,x\rangle\right)\cdot\cos\left(2\left\|k\right\|^2\cdot t-\langle x,k\rangle\right)
\end{aligned}
$$

Um die Wärmeleitungsgleichung zu bestimmen, benötigen wir außerdem noch $\partial_t f$. Es ist

$$
\begin{aligned}
\partial_t f &= \partial_t\left[\sin\left(2\left\|k\right\|^2\cdot t-\langle x,k\rangle\right)\cdot\exp\left(-\langle k,x\rangle\right)\right] \\
&= \partial_t\left[\sin\left(2\left\|k\right\|^2\cdot t-\langle x,k\rangle\right)\right]\cdot\exp\left(-\langle k,x\rangle\right) \\
&= \cos\left(2\left\|k\right\|^2\cdot t-\langle x,k\rangle\right)\cdot 2\left\|k\right\|^2\cdot\exp\left(-\langle k,x\rangle\right) \\
&= 2\left\|k\right\|^2\cdot\cos\left(2\left\|k\right\|^2\cdot t-\langle x,k\rangle\right)\cdot\exp\left(-\langle k,x\rangle\right)
\end{aligned}
$$

Nun können wir die Aufgabe lösen. Es ist

$$
\begin{aligned}
\Delta f-\partial f &= \sum_{l=1}^{n}\left(\partial_l^2 f\right)-\partial_t f \\
&= \sum_{l=1}^{n}\left(2\cdot k_l^2\cdot\exp\left(-\langle k,x\rangle\right)\cdot\cos\left(2\left\|k\right\|^2\cdot t-\langle x,k\rangle\right)\right) \\
&\quad-2\left\|k\right\|^2\cdot\cos\left(2\left\|k\right\|^2\cdot t-\langle x,k\rangle\right)\cdot\exp\left(-\langle k,x\rangle\right) \\
&= 2\cos\left(2\left\|k\right\|^2\cdot t-\langle x,k\rangle\right)\cdot\exp\left(-\langle k,x\rangle\right)\cdot\underbrace{(\underbrace{\sum_{l=1}^{n}\left(k_l^2\right)}_{=\left\|k\right\|^2}-\left\|k\right\|^2)}_{=0} \\
&= 0
\end{aligned}
$$