Weihnachtspecial zum Thema Differenzierbarkeit

Stephan Kulla (CC-BY)

18.12.2010

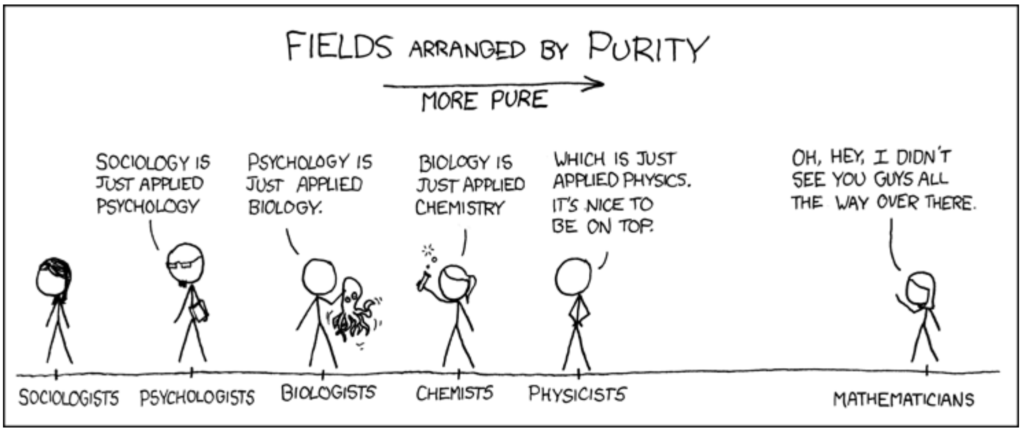

Abbildung 1: http://xkcd.com/435/

1 Track 1

Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$. Sei Außerdem für jedes $c \in \mathbb{R}^+$ die Funktion $\gamma_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $\gamma(t) = \begin{pmatrix} c \cdot \cos(t) \\ c \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$.

(a) Berechne den Gradienten $\nabla f(x, y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Bestimme die Ableitung $\partial_t \gamma_c(t) = \gamma_c'(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(c) Zeige durch direktes Nachrechnen, dass für alle $c \in \mathbb{R}^+$ und $t \in \mathbb{R}$ der Vektor $\partial_t \gamma_c(t)$ senkrecht auf $(\nabla f)(\gamma_c(t))$ steht.

(d) Bestätige dein Ergebnis aus Teilaufgabe (c) mit Hilfe der Kettenregel.

1.1 Teilaufgabe (a)

Sei $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Es ist

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x,y) \\ \partial_y f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x \sin(x^2+y^2) \\ \partial_y \sin(x^2+y^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x^2+y^2) \cdot 2x \\ \cos(x^2+y^2) \cdot 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \cdot \cos(x^2+y^2) \\ 2y \cdot \cos(x^2+y^2) \end{pmatrix}$$

1.2 Teilaufgabe (b)

Sei $c \in \mathbb{R}^+$ und $t \in \mathbb{R}$ beliebig. Es ist

$$\partial_t \gamma_c(t) = \partial_t \begin{pmatrix} c \cdot \cos(t) \\ c \cdot \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_t (c \cdot \cos(t)) \\ \partial_t (c \cdot \sin(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \cdot \sin(t) \\ c \cdot \cos(t) \end{pmatrix}$$

1.3 Teilaufgabe (c)

Sei $c \in \mathbb{R}^+$ und $t \in \mathbb{R}$ beliebig. $\partial_t \gamma_c(t)$ steht genau dann senkrecht auf $(\nabla f)(\gamma_c(t))$, wenn $\langle \partial_t \gamma_c(t), (\nabla f)(\gamma_c(t)) \rangle = 0$ ist. Dabei ist $(\nabla f)(\gamma_c(t))$ der Vektor, den man erhält, wenn man in $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \cdot \cos(x^2+y^2) \\ 2y \cdot \cos(x^2+y^2) \end{pmatrix}$ für x die x-Komponente und für y die y-Komponente von $\gamma_c(t)$ einsetzt.

$$\begin{aligned}
\langle \partial_t \gamma_c(t), (\nabla f)(\gamma_c(t)) \rangle &= \langle \begin{pmatrix} -c \cdot \sin(t) \\ c \cdot \cos(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \cdot (c \cdot \cos(t)) \cdot \cos\left((c \cdot \cos(t))^2 + (c \cdot \sin(t))^2\right) \\ 2 \cdot (c \cdot \sin(t)) \cdot \cos\left((c \cdot \cos(t))^2 + (c \cdot \sin(t))^2\right) \end{pmatrix} \rangle \\
&= \langle c \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}, 2c \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \cdot \cos\left(c^2 \cdot (\cos(t)^2 + \sin(t)^2)\right) \\ \sin(t) \cdot \cos\left(c^2 \cdot (\cos(t)^2 + \sin(t)^2)\right) \end{pmatrix} \rangle \\
&\downarrow \cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1 \\
&= \langle c \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}, 2c \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \cdot \cos\left(c^2\right) \\ \sin(t) \cdot \cos\left(c^2\right) \end{pmatrix} \rangle \\
&\downarrow \text{Konstanten aus dem Skalarprodukt ziehen} \\
&= 2c^2 \cdot \cos\left(c^2\right) \cdot \langle \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \rangle \\
&= 2c^2 \cdot \cos\left(c^2\right) \cdot \underbrace{(-\sin(t) \cdot \cos(t) + \cos(t) \cdot \sin(t))}_{=0} = 0
\end{aligned}$$

Damit steht $\partial_t \gamma_c(t)$ auf $(\nabla f)(\gamma_c(t))$ senkrecht.

1.4 Teilaufgabe (d)

Sei $c \in \mathbb{R}^+$ beliebig. Wir betrachten die Funktion $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto f(\gamma_c(t))$. ϕ ist also die Komposition der Funktion f mit $\gamma_c(t)$ (es ist $\phi = f \circ \gamma_c$). Die Funktion ϕ ist konstant, denn es ist für alle $t \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
\phi(t) &= f(\gamma_c(t)) = f(c\cdot\cos(t),\, c\cdot\sin(t)) = \cos((c\cdot\cos(t))^2 + (c\cdot\sin(t))^2)\\
&= \cos(c^2\cdot(\cos(t)^2+\sin(t)^2)) = \cos(c^2)
\end{aligned}
$$

Da ϕ konstant ist, ist ϕ insbesondere differenzierbar mit Ableitung 0 (es ist $\phi'(t) = 0$). Nun kann man aber auch $\phi'(t)$ mit der Kettenregel ausrechnen. Sei im Folgenden $\gamma_1(t) = c\cdot\cos(t)$ die x-Komponente und $\gamma_2(t) = c\cdot\sin(t)$ die y-Komponente der Funktion $\gamma_c(t)$. Es ist

$$
\begin{aligned}
\phi'(t) = \partial_t\phi(t) = \partial_t f(\gamma_c(t)) &\overset{\text{Kettenregel}}{=} (\partial_x f(x,y),\, \partial_y f(x,y))_{x=\gamma_1(t),\, y=\gamma_2(t)} \begin{pmatrix}\partial_t\gamma_1(t)\\ \partial_t\gamma_2(t)\end{pmatrix}\\
&= (\partial_x f(\gamma_1(t),\gamma_2(t)),\, \partial_y f(\gamma_1(t),\gamma_2(t))) \begin{pmatrix}\partial_t\gamma_1(t)\\ \partial_t\gamma_2(t)\end{pmatrix}\\
&= \partial_x f(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\cdot\partial_t\gamma_1(t) + \partial_y f(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\cdot\partial_t\gamma_2(t)\\
&= \langle(\nabla f)(\gamma_c(t)),\, \partial_t\gamma_c(t)\rangle
\end{aligned}
$$

Damit ist $\langle(\nabla f)(\gamma_c(t)),\, \partial_t\gamma_c(t)\rangle = \phi'(t)$, also $\langle(\nabla f)(\gamma_c(t)),\, \partial_t\gamma_c(t)\rangle = \phi'(t) = 0$.

2 Track 2

Sei folgende die Funktion f gegeben durch

$$
f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+ : \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}\exp(x+y)\\ \exp(x-y)\end{pmatrix}
$$

(a) Beweise, dass f bijektiv ist und finde die Umkehrfunktion $g : \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

(b) Bestimme für alle $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ die Jacobi-Matrix $\mathcal{J}_f(x,y)$.

(c) Bestimme für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$ die Jacobi-Matrix $\mathcal{J}_g(x,y)$.

(d) Zeige durch direktes Nachrechnen, dass für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$ die Gleichung $\mathcal{J}_g(x,y) = \mathcal{J}_f(g(x,y))^{-1}$ erfüllt ist.

2.1 Teilaufgabe (a)

Die Umkehrabbildung $g : \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ finden wir, indem wir das Gleichungssytem

$$
\begin{aligned}
f_1(x,y) &= \exp(x+y) = a\\
f_2(x,y) &= \exp(x-y) = b
\end{aligned}
$$

nach a und b umstellen. Es ist

$$
\begin{aligned}
&\begin{aligned}\exp(x+y) &= a\\ \exp(x-y) &= b\end{aligned} && \mid \ln(\cdot)\\
\Rightarrow\ &\begin{aligned}x+y &= \ln(a)\\ x-y &= \ln(b)\end{aligned} && \mid \text{Gleichungssystem lösen}\\
\Rightarrow\ &\begin{aligned}x &= \tfrac{\ln(a)+\ln(b)}{2}\\ y &= \tfrac{\ln(a)-\ln(b)}{2}\end{aligned}
\end{aligned}
$$

Damit erhalten wir als Umkehrfunktion g:

$$g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\ln(x)+\ln(y)}{2} \\ \frac{\ln(x)-\ln(y)}{2} \end{pmatrix}$$

Beachte, dass g wohldefiniert ist, weil der Definitionsbereich $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ und der Logarithmus $\ln(\cdot)$ für positive reelle Zahlen definiert ist. Es ist jetzt noch nachzuprüfen, dass $f \circ g = \mathrm{id}$ ist:

$$\begin{aligned}(f \circ g)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= f\left(g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} \frac{\ln(x)+\ln(y)}{2} \\ \frac{\ln(x)-\ln(y)}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{\ln(x)+\ln(y)}{2} + \frac{\ln(x)-\ln(y)}{2}\right) \\ \exp\left(\frac{\ln(x)+\ln(y)}{2} - \frac{\ln(x)-\ln(y)}{2}\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \exp(\ln(x)) \\ \exp(\ln(y)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\end{aligned}$$

2.2 Teilaufgabe (b)

Sei $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ beliebig. Es ist

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_f(x, y) &= \begin{pmatrix} \partial_x f_x(x, y) & \partial_y f_x(x, y) \\ \partial_x f_y(x, y) & \partial_y f_y(x, y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_x \exp(x+y) & \partial_y \exp(x+y) \\ \partial_x \exp(x-y) & \partial_y \exp(x-y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(x+y) & \exp(x+y) \\ \exp(x-y) & -\exp(x-y) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

2.3 Teilaufgabe (c)

Sei $(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ beliebig. Es ist

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_g(x, y) &= \begin{pmatrix} \partial_x g_x(x, y) & \partial_y g_x(x, y) \\ \partial_x g_y(x, y) & \partial_y g_y(x, y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_x \frac{\ln(x)+\ln(y)}{2} & \partial_y \frac{\ln(x)+\ln(y)}{2} \\ \partial_x \frac{\ln(x)-\ln(y)}{2} & \partial_y \frac{\ln(x)-\ln(y)}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2x} & \frac{1}{2y} \\ \frac{1}{2x} & -\frac{1}{2y} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

2.4 Teilaufgabe (d)

Sei $(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ beliebig. Es ist

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{J}_f(g(x,y)))^{-1} &= \left(\mathcal{J}_f\begin{pmatrix}\frac{\ln(x)+\ln(y)}{2}\\ \frac{\ln(x)-\ln(y)}{2}\end{pmatrix}\right)^{-1}\\
&= \begin{pmatrix}\exp\left(\frac{\ln(x)+\ln(y)}{2}+\frac{\ln(x)-\ln(y)}{2}\right) & \exp\left(\frac{\ln(x)+\ln(y)}{2}+\frac{\ln(x)-\ln(y)}{2}\right)\\ \exp\left(\frac{\ln(x)+\ln(y)}{2}-\frac{\ln(x)-\ln(y)}{2}\right) & -\exp\left(\frac{\ln(x)+\ln(y)}{2}-\frac{\ln(x)-\ln(y)}{2}\right)\end{pmatrix}^{-1}\\
&= \begin{pmatrix}\exp(\ln(x)) & \exp(\ln(x))\\ \exp(\ln(y)) & -\exp(\ln(y))\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}x & x\\ y & -y\end{pmatrix}^{-1}\\
&= \begin{pmatrix}\frac{1}{2x} & \frac{1}{2y}\\ \frac{1}{2x} & -\frac{1}{2y}\end{pmatrix} = \mathcal{J}_g(x,y)
\end{aligned}
$$

Um das Inverse der Matrix $\begin{pmatrix}x & x\\ y & -y\end{pmatrix}$ zu berechnen, kann der Gauß-Jordan-Algorithmus aus dem letzten Semester verwendet werden (ich lass diesen hier weg, weil es mir zu viel Schreibarbeit ist).

3 Track 3

Sei $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ eine homogene Funktion vom Grad 2, d.h. für alle $x\in\mathbb{R}^n$ und $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ gilt die Gleichung:

$$f(tx) = t^2 f(x)$$

Außerdem sei f in allen Punkten $x\neq 0$ differenzierbar. Zeigen Sie, dass für alle $x\in\mathbb{R}^n$ die Gleichung

$$\langle x,\,(\nabla f)(x)\rangle = 2\cdot f(x)$$

erfüllt ist, wobei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das euklidische Standard-Skalarprodukt bezeichnet.

3.1 Lösungsweg - so kannst du auf die Lösung kommen

Um dir den Lösungsweg so darzustellen, dass du in Zunkunft solche Aufgaben selbständig lösen kannst, werde ich jetzt etwas anderes ausprobieren. Anstatt dir hier einen perfekten Lösungsweg darzustellen (bei dem die Gafhr besteht, dass man sich fragt, wie man selbst drauf kommen kann), werde ich meinen *gesamten* Gedankengang zur Lösung dieser Aufgabe aufschreiben. Falls dich eine solche Darstellung langweilt, kannst du den folgenden Abschnitt überspringen und beim Beweis fortfahren zu lesen. Es wäre eine Hilfe für mich, wenn du mir per Mail Feedback zukommen lässt, ob dir diese Art der Lösung hilft oder nicht.

Mein Lösungsweg: Zunächst stelle ich fest, dass nach Aufgabenstellung nur die Differenzierbarkeit von f für Punkte $x\neq 0$ angenommen wird. Deshalb vermute ich, dass sich der Beweis für Punkte $x=0$ und $x\neq 0$ unterscheiden wird (Diese Vermutung kommt intuitiv und ist, so denke ich, Resultat meiner Erfahrung mit dem Lösen mathematischer Aufgaben).

Zunächst entscheide ich mich dafür, den Fall $x = 0$ anzuschauen (Ich denke, dass dieser Fall einfacher zu beweisen ist und ich finde es motivierender, mit dem Einfacherem zu beginnen und sich dann dem Schwierigerem zuzuwenden). Für $x = 0$ muss ich beweisen, dass $f(0) = \langle 0, (\nabla f)(0)\rangle$ ist. Wegen $\langle 0, (\nabla f)(0)\rangle = 0$ (ein Argument des Skalarprodukts ist 0), muss ich also zeigen, dass $f(0) = 0$ ist. Hier kann ich vielleicht die Homogenitätsrelation $f(tx) = t^2 \cdot f(x)$ verwenden. Diese erinnert mich nämlich an die eine Bedingung für lineare Abbildungen: $g(\lambda x) = \lambda g(x)$. Wie hat man nochmal bei linearen Abbildungen g bewiesen, dass $g(0) = 0$ ist?
So ging es:

$$\begin{aligned} g(0) &= g(2\cdot 0) = 2\cdot g(0) = g(0) + g(0) \quad | -g(0) \\ \Rightarrow \quad g(0) - g(0) &= g(0) + g(0) - g(0) \\ \Rightarrow \quad 0 &= g(0) \end{aligned}$$

Okay, eine ähnliche Vorgehensweise ist auch für f möglich (siehe späteren Beweis).

Nun zum Fall $x \neq 0$. Mein erster (nicht zum Ziel führender) Gedankengang war der, den Term $\langle x, (\nabla f)(x)\rangle$ schrittweise in den Term $f(x)$ umzuformen. Meine erste Termumformungen auf dem Schmierblatt waren:

$$\langle x, (\nabla f)(x)\rangle = \langle x, \tfrac{(\nabla f)(2x)}{4}\rangle = \tfrac{1}{4}\langle x, (\nabla f)(2x)\rangle = \text{? (hier wusste ich nicht mehr weiter...)}$$

Es folgen weitere Gedankengänge, die so unfruchtbar waren, dass es sich nicht lohnt, sie hier zu nennen. Jedoch ergab sich aus einen dieser Gedankengänge ein Widerspruch, welcher die Aussage der Aufgabe widerlegt - uncool, wenn man die Aufgabe eigentlich beweisen möchte. Dieser Widerspruch löste sich jedoch später wieder auf (siehe Abschnitt "Der widersprüchliche Gedankengang").

Irgendwie muss ich die Differenzierbarkeit im Punkt $x \neq 0$ der Funktion f verwenden. Was weiß ich über differenzierbare Funktionen, wo der Ausdruck $\langle (\nabla f)(x), x\rangle$ oder ein ähnlicher auftaucht? Definition 2.2.1 im Skript angwewandt auf f: f ist im Punkt x differenzierbar, wenn für alle $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt

$$f(x+h) = f(x) + \phi(h) + \psi(h) \text{ wobei } \lim_{h\to 0} \frac{\psi(h)}{\|h\|} = 0 \text{ und } \phi \text{ linear ist}$$

Zusammen mit der Definition 2.2.7 wird daraus

$$f(x+h) = f(x) + \mathcal{J}_f(x)\cdot h + \psi(h) \text{ wobei } \lim_{h\to 0} \frac{\psi(h)}{\|h\|} = 0 \;\; (\mathcal{J}_f \text{ ist die Funktionalmatrix von } f)$$

Nun ist in meinem Fall

$$\mathcal{J}_f(x) \cdot h = (\partial_1 f(x),\, \partial_2 f(x),\, \ldots,\, \partial_n f(x)) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \partial_1 f(x) \cdot h_1 + \ldots + \partial_n f(x) \cdot h_n$$

$$= \langle (\nabla f)(x),\, h \rangle$$

Ich erhalte also

$$f(x+h) = f(x) + \langle (\nabla f)(x),\, h \rangle + \psi(h) \text{ wobei } \lim_{h \to 0} \frac{\psi(h)}{\|h\|} = 0$$

Das sieht schon einmal vielversprechend aus. Ich will, dass aus dem h in $\langle (\nabla f)(x),\, h \rangle$ irgendwie ein x wird. Wie erreiche ich das?
Mein Ansatz ist folgendender: Ich ersetze h durch $\epsilon \cdot x$, wobei $\epsilon \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl (und damit kein Vektor aus $\mathbb{R}^n$) ist. Ich erhalte dann:

$$f(x + \epsilon \cdot x) = f(x) + \langle (\nabla f)(x),\, \epsilon \cdot x \rangle + \psi(\epsilon \cdot x) \text{ wobei } \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\psi(\epsilon \cdot x)}{\|\epsilon \cdot x\|} = 0$$

Den Term $f(x+\epsilon \cdot x)$ kann ich auch anders umformen, indem ich die Homogenität von f ausnutze:

$$f(x + \epsilon \cdot x) = f((1+\epsilon) \cdot x) = (1+\epsilon)^2 \cdot f(x) = (1 + 2\epsilon + \epsilon^2) \cdot f(x) = f(x) + 2\epsilon f(x) + \epsilon^2 f(x)$$

Wenn ich nun beide Ergebnisse kombiniere, so komme ich auf die Lösung (siehe Beweis).

3.2 Der Beweis

Sei $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Für $x = 0$ ist die Gleichung $\langle (\nabla f)(x),\, x \rangle = 2 \cdot f(x)$ erfüllt, denn es ist

$$\begin{aligned} & 4 \cdot f(0) = f(2 \cdot 0) = f(0) \quad | - f(0) \\ \Rightarrow\ & 3 \cdot f(0) = 0 \\ \Rightarrow\ & 2 \cdot f(0) = \tfrac{2}{3} \cdot 3 \cdot f(0) = \tfrac{2}{3} \cdot 0 = 0 = \langle (\nabla f)(0), 0 \rangle \end{aligned}$$

Sei nun $x \neq 0$ und sei $\epsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ beliebig. Es ist zum einen

$$f(x + \epsilon \cdot x) = f((1+\epsilon) \cdot x) = (1+\epsilon)^2 \cdot f(x) = (1 + 2\epsilon + \epsilon^2) \cdot f(x) = f(x) + 2\epsilon f(x) + \epsilon^2 f(x)$$

Zum anderen ist f im Punkt $x \neq 0$ differenzierbar und es ist

$$f(x + \epsilon \cdot x) = f(x) + \langle (\nabla f)(x),\, \epsilon \cdot x \rangle + \psi(\epsilon \cdot x) \text{ wobei } \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\psi(\epsilon \cdot x)}{\|\epsilon \cdot x\|} = 0$$

Durch Gleichstellung beider Gleichungen erhalten wir

$$\begin{array}{rrcll} & f(x)+2\epsilon f(x)+\epsilon^2 f(x) & = & f(x+\epsilon\cdot x) = f(x)+\langle(\nabla f)(x),\,\epsilon\cdot x\rangle+\psi(\epsilon\cdot x) & \mid -f(x) \\ \Rightarrow & 2\epsilon f(x)+\epsilon^2 f(x) & = & \langle(\nabla f)(x),\,\epsilon\cdot x\rangle+\psi(\epsilon\cdot x) & \\ \Rightarrow & 2\epsilon f(x) & = & \langle(\nabla f)(x),\,\epsilon\cdot x\rangle+\psi(\epsilon\cdot x)-\epsilon^2 f(x) & \mid \cdot\frac{1}{\epsilon}\ (\epsilon\neq 0) \\ \Rightarrow & 2f(x) & = & \langle(\nabla f)(x),\,x\rangle+\frac{\psi(\epsilon\cdot x)}{\epsilon}-\epsilon f(x) & \end{array}$$

Wir nehmen nun den Grenzwert auf beiden Seiten der Gleichung für ϵ gegen 0 und erhalten das gewünschte Ergebnis. Dazu nehmen wir eine Folge $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty}\epsilon_n = 0$ und $\forall n\in\mathbb{N}:$ $\epsilon_n\neq 0$.

$$\begin{aligned} 2f(x) &= \lim_{n\to\infty} 2f(x) \\ &= \lim_{n\to\infty}\langle(\nabla f)(x),\,x\rangle+\frac{\psi(\epsilon_n\cdot x)}{\epsilon_n}-\epsilon_n f(x) \\ &= \lim_{n\to\infty}\langle(\nabla f)(x),\,x\rangle+\underbrace{\frac{\psi(\epsilon_n\cdot x)}{\|\epsilon_n\cdot x\|}}_{\to 0}\cdot\|x\|-\underbrace{\epsilon_n f(x)}_{\to 0} \\ &= \langle(\nabla f)(x),\,x\rangle \end{aligned}$$

nice.

3.3 Alternativer Beweis

Alternativ kann diese Aufgabe auch folgendermaßen bewiesen werden:

Sei $x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ beliebig. Wir betrachten die Gleichung $t^2 f(x) = f(tx)$ und leiten beide Seiten der Gleichung nach t ab:

$$\begin{array}{rrcll} & t^2 f(x) & = & f(t\cdot x) & \\ \Rightarrow & \partial_t(t^2 f(x)) & = & \partial_t(f(t\cdot x)) & \mid \text{Kettenregel beachten} \\ \Rightarrow & 2tf(x) & = & (\partial_1 f(tx),\ldots,\partial_n f(tx))\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} & \\ \Rightarrow & 2tf(x) & = & \langle(\nabla f)(tx),\,x\rangle & \mid \text{Setze } t=1 \\ \Rightarrow & 2\cdot 1\cdot f(x) & = & \langle(\nabla f)(1\cdot x),\,x\rangle & \\ \Rightarrow & 2f(x) & = & \langle(\nabla f)(x),\,x\rangle & \end{array}$$

nice.

3.4 Der widersprüchliche Gedankengang

Als ich über die Aufgabe nachgedacht hatte, hatte ich einen Ansatz verfolgt, der mich auf folgenden Widerspruch führte:

$$\begin{aligned}
8 \cdot f(x) &= 2 \cdot 4 \cdot f(x) \\
&\downarrow\ t^2 f(x) = f(tx) \\
&= 2 \cdot f(2x) \\
&\downarrow\ 2f(x) = \langle \nabla f(x) | x \rangle \\
&= \langle \nabla f(2x) | 2x \rangle \\
&\downarrow\ f(tx) = t^2 f(x) \\
&= \langle \nabla 4 \cdot f(x) | 2x \rangle = \langle 4 \cdot \nabla f(x) | 2x \rangle \\
&= 4 \cdot 2 \cdot \langle \nabla f(x) | x \rangle = 8 \cdot \langle \nabla f(x) | x \rangle \\
&\downarrow\ \langle \nabla f(x) | x \rangle = 2 \cdot f(x) \\
&= 8 \cdot 2 \cdot f(x) = 16 \cdot f(x)
\end{aligned}$$

Jedoch folgt aus der Gleichung $8 \cdot f(x) = 16 \cdot f(x) \Leftrightarrow f(x) = 2 \cdot f(x)$, dass $f(x) = 0$ ist. Dies würde jedoch bedeuten, dass jede homogene Funktion vom Grad 2 gleich der Nullfunktion wäre. Nun ist jedoch die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$$

eine konkrete homogene Funktion vom Grad 2, für die (wenn man es nachrechnet) der Zusammenhang $\langle \nabla f(x), x \rangle = 2 \cdot f(x)$ gilt. Diese Funktion ist aber nicht konstant Null. Wo liegt der Fehler im Gedankengang? To be continued ...