Musteraufgaben zu kompakten Mengen

Stephan Kulla (CC-BY)

28.11.2011

1 Aufgabe 1

Beweise, dass die Menge $X = [1, 2] \cup [4, 5]$ kompakt ist.

1.1 Beweis 1

Die Menge X ist als endliche Vereinigung der abgeschlossenen Mengen $[1, 2]$ und $[4, 5]$ wieder abgeschlossen. Außerdem ist $[1, 2]$ und $[4, 5]$ Teilmengen der kompakten Menge $[1, 5]$, so dass auch X eine Teilmenge von $[1, 5]$ ist. Da damit X eine abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Mengen ist, ist X kompakt.

1.2 Beweis 2

Sei $\bigcup_{i\in I} O_i$ eine offene Überdeckung von $X = [1, 2] \cup [4, 5]$. Da $[1, 2] \subset X$ und $[4, 5] \subset X$ ist, ist $\bigcup_{i\in I} O_i$ eine offene Überdeckung von $[1, 2]$ und $[4, 5]$. Da $[1, 2]$ und $[4, 5]$ kompakt sind, gibt es endliche Mengen $J_1 \subseteq I$ und $J_2 \subseteq I$ mit $[1, 2] \subseteq \bigcup_{i\in J_1} O_i$ und $[4, 5] \subseteq \bigcup_{i\in J_2} O_i$. Damit ist aber

$$\begin{aligned}
X &= [1, 2] \cup [4, 5] && \mid [1, 2] \subseteq \bigcup_{i\in J_1} O_i \\
&\subseteq \left(\bigcup_{i\in J_1} O_i\right) \cup [4, 5] && \mid [4, 5] \subseteq \bigcup_{i\in J_2} O_i \\
&\subseteq \left(\bigcup_{i\in J_1} O_i\right) \cup \left(\bigcup_{i\in J_2} O_i\right) \\
&= \bigcup_{i\in J_1\cup J_2} O_i
\end{aligned}$$

Damit ist $\bigcup_{i\in J_1\cup J_2} O_i$ eine endliche und offene Überdeckung von X, womit bewiesen ist, dass jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt, so dass X kompakt ist.

1.3 Beweis 3

X ist als beschränkte und abgeschlossene Teilmenge des endlichen, normierten und reellen Vektorraums $\mathbb{R}$ kompakt.

2 Aufgabe 2

Betrachte den Vektorraum $C[0,2]$ der stetigen Funktionen auf dem Definitionsbereich $[0,2]$ ausgestattet mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. Sei $\overline{B} = \{f \in C[0,2] \mid \|f\|_\infty \leq 4\}$. Beweise, dass $\overline{B}$ abgeschlossen und beschränkt aber nicht kompakt ist.

2.1 Der Beweis

Beweis der Beschränktheit: Sei $f, g \in \overline{B}$, es gilt:

$$d(f,g) = \|f-g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \leq 4+4 = 8$$

Damit ist $\overline{B}$ beschränkt.

Beweis der Abgeschlossenheit: Sei $\mathrm{N} : C[0,2] \to \mathbb{R} : f \mapsto \|f\|_\infty$ die Supremumsnorm auf $C[0,2]$. Es ist

$$\begin{aligned}\overline{B} &= \{f \in C[0,2] \mid \|f\|_\infty \leq 4\} = \{f \in C[0,2] \mid \mathrm{N}(f) \leq 4\} \\ &= \{f \in C[0,2] \mid \mathrm{N}(f) \in [0,\,4]\} = \mathrm{N}^{-1}([0,\,4])\end{aligned}$$

Damit ist $\overline{B}$ das Urbild der in $\mathbb{R}$ abgeschlossenen Menge $[0,\,4]$ unter der (stetigen) Supremumsnorm N (Jede Normabbildung ist stetig). Da jedes Urbild einer abgeschlossenen Menge unter einer stetigen Funktion wieder abgeschlossen ist, ist auch $\overline{B}$ abgeschlossen.

Erklärung zur Urbildschreibweise: Sei $f : X \to Y$ eine beliebige Funktion und $A \subseteq Y$ eine beliegie Teilmenge des Wertebereiches Y. Das Urbild $f^{-1}(A)$ ist als die Menge aller Argumente $x \in X$ definiert, für die $f(x) \in A$ gilt.

Beweis, dass $\overline{B}$ nicht kompakt ist: Wir beweisen, dass die Menge $\overline{B}$ nicht kompakt ist, indem wir eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ finden, die keine konvergente Teilfolge besitzt. Dies ist zum Beispiel dann der Fall, wenn zwei verschiedene Folgenglieder f_a und f_b von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Abstand größer als eine konstante Zahl c besitzen (wenn also ihr Abstand $|f_a(x) - f_b(x)|$ für mindestens ein $x \in [0,2]$ größer als c ist).
Wir wählen $f_n(x) = \sin(2^n \cdot \pi \cdot x)$. Betrachten wir nun zwei Funktionen f_a und f_b dieser Funktionenfolge mit $a \neq b$. Sei o.B.d.A. $a > b$. Wir betrachten nun die Funktionen f_a und f_b an der Stelle $x = 2^{-(b+1)}$:

$$\begin{aligned}f_b\left(2^{-(b+1)}\right) &= \sin\left(2^b \cdot \pi \cdot 2^{-(b+1)}\right) = \sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 1 \\ f_a\left(2^{-(b+1)}\right) &= \sin\left(2^a \cdot \pi \cdot 2^{-(b+1)}\right) = \sin\left(\underbrace{2^{a-b-1}}_{\in\mathbb{N}} \cdot \pi\right) = 0\end{aligned}$$

Damit ist $\|f_a - f_b\|_\infty \geq 1$, weil $|f_a\left(2^{-(b+1)}\right) - f_b\left(2^{-(b+1)}\right)| = 1$ ist. Damit kann $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge besitzen, was beweist, dass die Menge $\overline{B}$ nicht kompakt ist.

Beachte: Dass Kriterium, dass beschränkte und abgeschlossene Mengen kompakt sind, gilt nur in *endlichdimensionalen*, normierten und reellen Vektorräumen. Da $C[0,2]$ *unendlichdimensional* ist, ist das Kriterium hier nicht anwendbar und stellt damit kein Widerspruch zu unserer Lösung dar.

3 Aufgabe 3

Bestimme die Häufungspunkte der Menge $M = \{(-1)^n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

3.1 Lösung

Da die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Werte und nur die Werte 1 und -1 annimmt, ist die Menge $M = \{(-1)^n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ gleich der zweielementigen Menge $\{1; -1\}$. Nach Definition ist ein Häufungspunkt einer Menge M ein Punkt, bei dem sich in jeder Umgebung um diesen Punkt unendlich viele Punkte der Menge M befinden. Da M noch nicht einmal unendlich viele Elemente besitzt, kann es auch keine Häufungspunkte besitzen. Damit gibt es für die Menge M keine Häufungspunkte.

Beachte: Während die Menge $M = \{(-1)^n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ keine Häufungspunkte besitzt, besitzt die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sehr wohl Häufungspunkte, nämlich die Zahlen -1 und 1. Du musst also gut zwischen den Begriffen *Häufungspunkt einer Menge* und *Häufungspunkt einer Folge* unterscheiden.

4 Aufgabe 4

Bestimme alle Häufungspunkte der Menge $M = \{1 + (-1)^n \frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Ist M abgeschlossen? Ist M kompakt?

4.1 Lösung

Der einzige Häufungspunkt der Menge M ist 1.

Sei U eine beliebige Umgebung von 1. Dann gibt es einen ϵ-Ball $B_\epsilon(1)$ um 1, der vollkommen in U liegt ($B_\epsilon(1) \subseteq U$). Weil die Folge $\left(1 + (-1)^n \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 1 konvergiert, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $d(1+(-1)^n \frac{1}{n}, 1) = \left|\left(1 + (-1)^n \frac{1}{n}\right) - 1\right| < \epsilon$ für alle $n \geq N$ gilt. Damit liegen auch alle Punkt $1+(-1)^n \frac{1}{n}$ für $n \geq N$ im ϵ-Ball $B_\epsilon(1)$ und in der Umgebung U. Also liegen unendlich viele Punkte aus M in U und somit ist 1 ein Häufungspunkt der Menge. (Beachte, dass es hierbei wichtig ist, dass zwei Punkte $1+(-1)^n \frac{1}{n}$ und $1+(-1)^m \frac{1}{m}$ für $m \neq n$ unterschiedlich sind. Dies gilt zum Beispiel nicht für zwei Punkte $(-1)^n$ und $(-1)^m$, denn es kann auch $(-1)^n = (-1)^m$ für $n \neq m$ sein.)

Betrachten wir nun einen Punkt $x \neq 1$. Nehmen wir als Umgebung von x den ϵ-Ball $B_{\frac{|x-1|}{2}}(x)$. Da die Folge $\left(1 + (-1)^n \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 1 konvergiert, liegen fast alle Folgenglieder im Ball $B_{\frac{|x-1|}{2}}(1)$, welcher disjunkt ist zu $B_{\frac{|x-1|}{2}}(x)$ (dies folgt aus der Definition der beiden Bälle). Damit können nur endlich viele Folgenglieder $1 + (-1)^n \frac{1}{n}$ in $B_{\frac{|x-1|}{2}}(x)$ liegen, so dass x kein Häufungspunkt der Menge $M = \{1 + (-1)^n \frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ ist.

Weil M nicht alle seine Häufungspunkte besitzt (1 liegt nicht in M), ist M nicht abgeschlossen und somit auch nicht kompakt.