Aufgaben zu Taylorreihen mehrerer Variablen

Stephan Kulla (CC-BY)

07.01.2011

1 Aufgabe 1

Berechne das Taylorpolynom zweiten Grades der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 = (3, 2)$, wobei f gegeben ist durch

$$f(x, y) = \exp(x^3 + 2y)$$

1.1 Lösungsvorschlag

Zunächst berechnen wir alle notwendigen partiellen Ableitungen:

$$\begin{array}{llll}
\partial_1 f(x,y) & = 3 \cdot x^2 \cdot \exp(x^3 + 2y) & \Rightarrow \quad \partial_1 f(3,2) = 3 \cdot 3^2 \cdot \exp(3^3 + 2 \cdot 2) & = 27 \cdot \exp(31) \\
\partial_2 f(x,y) & = 2 \cdot \exp(x^3 + 2y) & \Rightarrow \quad \partial_2 f(3,2) = 2 \cdot \exp(3^3 + 2 \cdot 2) & = 2 \cdot \exp(31) \\
\partial_{11} f(x,y) & = (6x + 9x^4) \cdot \exp(x^3 + 2y) & \Rightarrow \quad \partial_{11} f(3,2) = (6 \cdot 3 + 9 \cdot 3^4) \cdot \exp(3^3 + 2 \cdot 2) & = 747 \cdot \exp(31) \\
\partial_{21} f(x,y) & = 6 \cdot x^2 \cdot \exp(x^3 + 2y) & \Rightarrow \quad \partial_{21} f(3,2) = 6 \cdot 3^2 \cdot \exp(3^3 + 2 \cdot 2) & = 54 \cdot \exp(31) \\
\partial_{12} f(x,y) & = 6 \cdot x^2 \cdot \exp(x^3 + 2y) & \Rightarrow \quad \partial_{12} f(3,2) = 6 \cdot 3^2 \cdot \exp(3^3 + 2 \cdot 2) & = 54 \cdot \exp(31) \\
\partial_{22} f(x,y) & = 4 \cdot \exp(x^3 + 2y) & \Rightarrow \quad \partial_{22} f(3,2) = 4 \cdot \exp(3^3 + 2 \cdot 2) & = 4 \cdot \exp(31)
\end{array}$$

Nun können wir alle relevanten Ableitungen bestimmen:

$$\begin{aligned}
f'(2,3) &= \partial_1 f(3,2) \cdot (x-3) + \partial_2 f(3,2) \cdot (y-2) = 27 \cdot \exp(31) \cdot (x-3) + 2 \cdot \exp(31) \cdot (y-2) \\
f''(2,3) &= \partial_{11} f(3,2) \cdot (x-3)^2 + \partial_{12} f(3,2) \cdot (x-3) \cdot (y-2) \\
&\quad + \partial_{21} f(3,2) \cdot (y-2) \cdot (x-3) + \partial_{22} f(3,2) \cdot (y-2)^2 \\
&= 747 \cdot \exp(31) \cdot (x-3)^2 + 108 \cdot \exp(31) \cdot (x-3) \cdot (y-2) + 4 \cdot \exp(31) \cdot (y-2)^2
\end{aligned}$$

Damit können wir das Taylorpolynom zweiten Grades bestimmen:

$$\begin{aligned}
(T^{(2)}_{(3,2)} f)(x,y) &= f(3,2) + f'(3,2) + \tfrac{1}{2} f''(3,2) \\
&= \exp(31) + (27 \cdot \exp(31) \cdot (x-3) + 2 \cdot \exp(31) \cdot (y-2)) \\
&\quad + \tfrac{1}{2} \cdot \left(747 \cdot \exp(31) \cdot (x-3)^2 + 108 \cdot \exp(31) \cdot (x-3) \cdot (y-2) + 4 \cdot \exp(31) \cdot (y-2)^2\right)
\end{aligned}$$

2 Aufgabe 2

Gegeben sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto x^2 \cdot y^2 + \exp(z^2 + y)$. Berechnen sie explizit $f'(x, y, z)(u)$ und $f''(x, y, z)(u, v)$ für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ und $u, v \in \mathbb{R}^3$.

2.1 Lösungsweg

Nach Vorlesung ist $f'(x, y, z)$ diejenige lineare Funktion $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, die f an der Stelle (x, y, z) approximiert. Es gilt also

$$f\left(\vec{x} + \vec{\epsilon}\right) = f(\vec{x}) + \left(f'(\vec{x})\right)(\vec{\epsilon}) + \phi(\vec{\epsilon}) \text{ mit } \lim_{\vec{\epsilon} \to 0} \frac{\phi(\vec{\epsilon})}{\|\vec{\epsilon}\|} = 0$$

Weiterhin lässt sich nach Vorlesung die Darstellungsmatrix der linearen Abbildung $f'(x, y, z)$ durch die Jacobi-Matrix angeben.

Hinweis: Die Jacobimatrix *ist nicht* die Ableitung $f'(x, y, z)$ sondern *stellt* die Ableitung $f'(x, y, z)$ dar. Diese Unterscheidung ist in einigen Fällen wichtig. So ändert sich die lineare Abbildung $f'(x, y, z)$ mit einem Basiswechsel nicht, jedoch aber die dazugehörige Jacobimatrix. Diese Situation ist vergleichbar mit der Unterscheidung zwischen einer Zahl und der Ziffernfolge, die diese Zahl darstellt. So wird in der Dezimaldarstellung die Zahl "zehn" dargstellt durch die Ziffernfolge "10", in der octalen Schreibweise (Basis 8) wird *dieselbe* Zahl "zehn" dargestellt durch "12" und in der binären Schreibweise (Basis 2) wird die Zahl "zehn" durch die Ziffernfolge "1010" dargstellt.

Um $f'(x, y, z)$ anzugeben, reicht es also ihre Darstellungsmatrix zu berechnen:

$$\mathcal{J}_f\,(x,\, y,\, z) = (\partial_x f,\, \partial_y f,\, \partial_z f) = \left(2xy^2,\, 2x^2 y + \exp(z^2 + y),\, 2z \cdot \exp(z^2 + y)\right)$$

$f''(x, y, z)$ ist nach Definition die Ableitung der Funktion $f'(x, y, z)$. Wie können wir diese bestimmen? Nach Definition 2.4.2 im Skript lässt sich $f''(x, y, z)$ durch die Hess-Matrix von f darstellen. Diese ist

$$H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f & \partial_{xy} f & \partial_{xz} f \\ \partial_{yx} f & \partial_{yy} f & \partial_{yz} f \\ \partial_{zx} f & \partial_{zy} f & \partial_{zz} f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y^2 & 4xy & 0 \\ 4xy & 2x^2 + \exp(z^2 + y) & 2z \cdot \exp(z^2 + y) \\ 0 & 2z \cdot \exp(z^2 + y) & (2 + 4z) \cdot \exp(z^2 + y) \end{pmatrix}$$

Hinweis: Da alle 2-fachen partiellen Ableitungen der Funktion f stetig sind, kann man nach dem Satz von Schwarz (Satz 2.1.12 im Skript) in der Hess-Matrix die partiellen Ableitungen vertauschen, ohne das Ergebnis zu ändern (es ist zum Beispiel $\partial_{xy} f = \partial_{yx} f$). Demnach muss die Hess-Matrix der Funktion f symmetrisch sein. Diese Tatsache kannst du ausnutzen, um dein Ergebnis zu kontrollieren oder um von Einträgen der Hess-Matrix auf die Einträge der diagonal gegenüberliegenden Komponenten zu schließen.

3 Lösung

Die Jacobi-Matrix von f ist

$$\mathcal{J}_f\,(x,\, y,\, z) = (\partial_x f,\, \partial_y f,\, \partial_z f) = \left(2xy^2,\, 2x^2 y + \exp(z^2 + y),\, 2z \cdot \exp(z^2 + y)\right)$$

Es ist damit

$$f'(x,yz)(u) = \mathcal{J}_f\,(x,\,y,\,z)\cdot u = \big(2xy^2,\,2x^2y+\exp(z^2+y),\,2z\cdot\exp(z^2+y)\big)\cdot\begin{pmatrix}u_x\\u_y\\u_z\end{pmatrix}$$

$$= \langle\begin{pmatrix}2xy^2\\2x^2y+\exp(z^2+y)\\2z\cdot\exp(z^2+y)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u_x\\u_y\\u_z\end{pmatrix}\rangle$$

Die Jacobi-Matrix der Ableitung $f'(x,y,z)$ entspricht der Hess-Matrix und ist damit

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix}\partial_{xx}f & \partial_{xy}f & \partial_{xz}f\\ \partial_{yx}f & \partial_{yy}f & \partial_{yz}f\\ \partial_{zx}f & \partial_{zy}f & \partial_{zz}f\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2y^2 & 4xy & 0\\ 4xy & 2x^2+\exp(z^2+y) & 2z\cdot\exp(z^2+y)\\ 0 & 2z\cdot\exp(z^2+y) & (2+4z)\cdot\exp(z^2+y)\end{pmatrix}$$

Es ist damit

$$f''(x,y,z)(u,v) = \langle H_f(x,y,z)\cdot u,\,v\rangle$$

$$= \langle\begin{pmatrix}2y^2 & 4xy & 0\\ 4xy & 2x^2+\exp(z^2+y) & 2z\cdot\exp(z^2+y)\\ 0 & 2z\cdot\exp(z^2+y) & (2+4z)\cdot\exp(z^2+y)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u_x\\u_y\\u_z\end{pmatrix},\begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix}\rangle$$