Überblick zur Maßtheorie

Stephan Kulla (CC-BY)

21.05.2011

So kannst du zeigen, dass eine Menge N eine Nullmenge ist:

- N hat das Maß Null
- N ist Teilmenge einer Nullmenge
- N ist eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen
- N ist eine Hyperebene
- N ist das Bild einer Nullmenge unter einer linearen Abbildung oder einer Translation
- $N = M \times X$, wobei M eine Nullmenge bezügliches des Maßes auf dem Raum ist, zu dem M gehört

So kannst du zeigen, dass eine Menge M messbar ist:

- M ist endlich messbar
- M ist eine abzählbare Vereinigung von messbaren Mengen
- M ist offen
- M ist abgeschlossen
- M geht aus Mengenoperationen aus messbaren Mengen hervor
- M ist Bild einer messbaren Menge unter einer linearen Abbildung oder einer Translation

So kannst du zeigen, dass eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ messbar ist:

- Der Graph von f ist messbar
- $\Lambda_c^+(f) = \{x \in A \,|\, f(x) > c\}$ ist messbar für alle $c \in \mathbb{R}$
- $\bar{\Lambda}_c^+(f) = \{x \in A \,|\, f(x) \geq c\}$ ist messbar für alle $c \in \mathbb{R}$
- $\Lambda_c^-(f) = \{x \in A \,|\, f(x) < c\}$ ist messbar für alle $c \in \mathbb{R}$
- $\bar{\Lambda}_c^-(f) = \{x \in A \,|\, f(x) \leq c\}$ ist messbar für alle $c \in \mathbb{R}$
- $A = C \cup D$ und die Funktionen $f|_C$ (f eingeschränkt auf C) und $f|_D$ (f eingeschränkt auf D) sind messbar

- $f = g + h$ oder $f = gh$, wobei g und h messbare Funktionen sind
- $f = \inf\{f_n\}$ oder $f = \sup\{f_n\}$, wobei f_n messbare Funktionen sind

Eigenschaften des Lesbesgue-Integrals (im Folgenden wird vorausgesetzt, dass alle Funktionen messbar sind):

- $\int f \,\mathrm{d}\mu = \mu\left(\bar{\Gamma}_{f^+}\right) - \mu\left(\bar{\Gamma}_{f^-}\right)$
- $\int_{C \cup D} f \,\mathrm{d}\mu = \int_C f \,\mathrm{d}\mu + \int_D f \,\mathrm{d}\mu$, wenn C und D disjunkt sind
- $\int_N f \,\mathrm{d}\mu = 0$, wenn N eine Nullmenge ist
- $\int_A f \,\mathrm{d}\mu = \int_A g \,\mathrm{d}\mu$, wenn $f = g$ fast überall ist (bis auf eine Nullmenge ist $f(x) = g(x)$)
- $\int_A f \,\mathrm{d}\mu \leq \int_A g \,\mathrm{d}\mu$, wenn $f \leq g$
- $\int_A (c \cdot f) \,\mathrm{d}\mu = c \cdot \int_A f \,\mathrm{d}\mu$ für $c \in \mathbb{R}$
- $\int_A (f + g) \,\mathrm{d}\mu = \int_A f \,\mathrm{d}\mu + \int_A g \,\mathrm{d}\mu$
- $\int_A c \,\mathrm{d}\mu = c \cdot \mu(A)$ für $c \in \mathbb{R}$